Volume 2, No. 2, Sept 2020

ISSN 2623-1638

JURNAL AXIOMATH

JURNAL MATEMATIKA DAN APLIKASINYA

Penerbit:
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Muslim Maros
email: axiomath@umma.ac.id

KETERSEDIAAN OPERASI JOIN DIPERLUAS KOTERI-k TAK-TERDOMINASI

Adam Makambak[1], La Ode Muhlis[2]

[1)2)] *Program Studi Sistem Informasi,*
Sekolah Tinggi Manajemen Informatika Komputer Kreatindo Manokwari
Jl. Kali Bambu (Reremi Puncak) Manokwari

[1)] adamakambak201@gmail.com
[2)] muhliszode.88@gmail.com

Abstract — **Penelitian ini bertujuan menganalisis ketersediaan dari koteri-k mayoritas tak-terdominasi yang menggunakan operasi join diperluas yaitu penggabungkan koteri-k, C_1 dan C_2 masing-masing atas semesta U_1 dan U_2 dengan unsur tereliminasi $x \in U_1$, dimana $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ yang menghasilakan koteri-k tak-terdominasi C_3 atas semesta $U_3 = \{(U_1 - \{x\}) \cup U_2\}$. Metode penggabungan koteri-k mayoritas tak-terdominasi yang menggunakan operasi join diperluas menghasilkan koteri $C_3 = C_1 \circledast_x C_2$ atas $U_3 = \{(U_1 - \{x\}) \cup U_2\}$. Hasil ketersediaan dari operasi join kemudian dibandingkan dengan ketersedian dengan menggunakan operasi join. Dari penelitian ini, menunjukkan bahwa ketersedian operasi join memberikan hasil yang lebih baik jika dibandingkan dengan ketersedian dari operasi join.**

Kata Kunci —**Koteri-k; koteri-k tak-terdominasi; operasi join; operasi join diperluas; dan ketersediaan system operasi join diperluas.**

I. PENDAHULUAN

Koteri-k merupakan himpunan korum yang memiliki paling banyak k korum yang saling lepas. Terdapat dua bentuk koteri-k yaitu koteri-k terdominasi dan koteri-k tak-terdominasi. Untuk koteri-k tak terdominasi dianggap lebih efisien jika dibandingkan dengan koteri-k terdominasi. Hal ini dikarenakan pada koteri-k terdominasi terdapat korum lain yang bukan merupakan anggota dari himpunan semesta yang ditinjau. Sedangkan untuk koteri-k tak terdominasi tidak ditemukannya korum lain yang bukan merupakan anggota himpunan korum yang ditinjau. Beberapa peneliti sebelumnya telah memalukan penelitian tentang koteri-k tak-terdominasi yaitu sebagaimana yang dilakukan oleh Jhen-Ruey Jiang (1994 and 2011), Kakugawa*et al*. (1993 and 1994), Lawi *et al*. (2005), Neilsen *et al*. (1994), dan Manabe*et al.* (2004).

Oleh karena koteri-k tak terdominasi tidak ditemukannya korum lain yang bukan merupakan anggota himpunan korum yang ditinjau hal ini memberikan tingkat reliabilitas yang lebih baik jika tingkat reliabilitas dari koteri-k terdominasi. Untuk ketersediaan dari koteri-k tak-terdominasi telah banyak peneliti yang melakukan penelitian dalam mengukur tingkat reliabilitas dari koteri-k tak terdominasi seperti halnya yang dilakukan oleh Kakugawa*et al.* (1993), Kuo*et al.* (2008), Peleg *et al.* (1995), Rustam *et al* (2008), Saxena*et al.* (2003), dan Wang *et al.* (2014). Pada penelitian sebelumnya juga, Muhlis dkk, 2018, membangun definisi operasi join diperluas yaitu operasi yang menggabungkan koteri-k tak-terdominasi. Operasi ini dikembangkan dari operasi join yang dibangun oleh Nielsen *et al*, 1992.

Pada penelitian ini yaitu bertujuan membandingkan tingkat reliabilitas operasi join diperluas terhadap tingkat reliabilitas operasi join. Adapun organisasi dari penelitian ini adalah sebagai berikut: Bagian

I adalah pendahuluan sebagaimana saat ini telah dibahas. Bagian II yaitu metode penelitian yang mengkaji tentang perbandingan ketersediaan. Bagian III adalah hasil dan pembahasan. Pada bagian ini yaitu menjelaskan bagaimana ketersediaan dari operasi join diperluas diperoleh. Bagian ke IV adalah kesimpulan.

II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam peneilitian ini adalah menganalisis ketersediaan koteri-k tak-terdominasi dengan menggunakan operasi join diperluas. Hasil yang diperoleh kemudian akan dibandingkan dengan ketersediaan koteri-k tak-terdominasi dengan menggunakan operasi join. Operasi penggabungan koteri-k tak-terdominasi dengan menggunakan operasi join diperluas yaitu didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1. *Misalkan $C_1 = \{G_1, G_2, \dots, G_l\}$ dan $C_2 = \{H_1, H_2, \dots, H_l\}$ adalah koteri-k mayoritas masing-masing atas semesta U_1dan U_2, dimana$U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Operasi join diperluas C_1 dan C_2 dengan satu unsur tereliminasi $x \in U_1$ yang membentuk $C_3 = C_1 \circledast_x C_2$ atas semesta $U_3 = \{(U_1 - \{x\}) \cup U_2\}$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$C_3 = C_1 \circledast_x C_2$$
$$= \left\{ Q \,\middle|\, Q \right.$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} (G_i - \{x\}) \cup H_p, & jika\, x \in G_i \\ \big((G_i - \{x\}) \cap (G_j - \{x\})\big) \cup (H_p \cup H_q), & jika\, x \in G_i \cap G_j \\ G_i, & jika\, x \notin G_i \end{array} \right\}$$

Dimana:$G_i, G_j \in C_1$; $H_p, H_q \in C_2$; untuk $i \neq j$ dan $p \neq q$.

Definisi 2. *Koleksi himpunan M dikatakan koteri-k mayoritas atas himpunan tak-kosong U jika dan hanya jika $M = \{Q : |Q| = N\}$. Dimana $N = \left\lceil \frac{n+1}{k+1} \right\rceil$, $n(> k) = |U|$.*

Definisi 3. C *koteri-k tak-terdominasi atas semesta U jika dan hanya jika tidak ditemukan $Q'(\subseteq U)$, $Q' \notin C_3$, yang memenuhi:*

1. *$\forall\, Q \in C$ berlaku $Q' \nsubseteq Q$.*
2. *Untuk setiap k korum saling pisah $Q_1, \dots, Q_k \in C$, terdapat korum Q_i sedemikian sehingga $Q' \cap Q_i \neq \emptyset$, $(1 \leq i \leq k)$.*
3. *Terdapat paling banyak $l(= k - 1)$ korum saling pisah $Q_1, \dots, Q_l \in C$, dimana $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $(1 \leq i \neq j \leq l)$, sedemikian sehingga $Q' \cap Q_i = \emptyset$, $(1 \leq i \leq l)$.*

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Kemampuan sistem untuk tetap beroperasi meskipun terdapat proses yang mengalami kegagalan yang disebabkan oleh partisi jaringan disebut dengan ketangguhan sistem. Ketangguhan sistem berkaitan erat dengan ketersediaan sistem yang digunakan. Ketersediaan dari suatu koteri didefinisikan sebagai peluang bahwa paling tidak terdapat satu korum yang dapat terbentuk yang dapat mengakses sumberdaya pada suatu waktu. Sedangkan untuk ketersediaan dari koteri-k didefinisikan sebagai peluang bahwa paling banyak terdapat korum-k yang terbentuk secara simultan yang dapat mengakses sumberdaya. Ketangguhan sistem dan ketersediaan suatu sistem didefinisikan dengan peluang yang nilainya berada dalam interval $[0, 1]$ untuk semua proses dalam suatu himpunan semesta.

Definisi *5. Misalkan $f_C(Q): U \to \{0,1\}, \forall\, Q \subseteq U$ adalah fungsi karakteristik sistem koteri C yaitu*

$$f_C(Q) = \begin{cases} 1 \quad , & jika\; ada\; korum\; Q \in C \\ 0 \quad , & selainnya \end{cases}$$

Ketersediaan sistem dari setiap koteri-k bergantung pada banyaknya koru m yang terbentuk. Jika N adalah banyaknya anggota himpunan semesta, q adalah ukuran korum, r merupakan peningkatan jumlah komponen (proses) yang gagal, dan banyaknya korum yang dapat dibentuk oleh koteri-k mayoritas dibentuk oleh $C = \binom{N}{q} = \frac{N!}{q!(N-q)!}$, maka ketersediaan koteri-k mayoritas diberikan oleh fungsi:

$$A(M) = \sum_{r=0}^{N-q} \binom{N}{q+r} p^{q+r} (1-p)^{N-(q+r)}$$

Jika n_1 adalah banyak anggota semesta U_1, n_2 adalah banyak anggota semesta U_2, q_1 adalah ukuran korum C_1, dan , q_2 adalah ukuran korum C_2 dan a adalah perubahan ukuran korum untuk C_1/C_2 setalah setiap korumnya diiriskan/digabungkan. Banyaknya korum yang terbentuk dari *penggabungan dua koteri-k mayoritas tak-terdominasi dengan menggunakan operasi join diperluas adalah*

$$\left\|C_3\right\| = \binom{n_1-1}{q_1-1}\binom{n_2}{q_2} + \sum_{a=1}^{q_1-1}\left(\binom{n_1-1}{q_1-a-1}\binom{n_2}{q_2+a}\right) + \binom{n_1-1}{q_1}$$

Maka untuk ketersedian yang diperoleh dari hasil operasi join dan operasi join diperluas sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

Teorema *Misal banyak elemen yang terlibat dalam sistem adalah* $(n_1-1)+n_2$. *Jika probabilitas suatu elemen tidak mengalami kegagalan yaitu* p *dan probabilitas suatu elemen mengalami kegagalan yaitu* $1-p$ *maka ketersediaan untuk operasi join diperluas diberikan oleh:*

$$AV(J_d) = \sum_{r=0}^{n_1-q_1}\binom{n_1-1}{q_1-1+r}p^{q_1-1+r}(1-p)^{n_1+q_1-r-1}\sum_{r=0}^{n_2-q_2}\binom{n_2}{q_2+r}p^{q_2+r}(1-p)^{n_2+q_2-r} + \sum_{a=1}^{q_1-1}\left(\sum_{r=0}^{n_1-q_1+a}\binom{n_1-1}{q_1-1-a+r}p^{q_1-a-1+r}(1-p)^{n_1+q_1-a-r-2}\sum_{r=0}^{n_2-q_2-a}\binom{n_2}{q_2+a+r}p^{q_2+a+r}(1-p)^{n_2+q_2+a-r}\right) + \sum_{r=0}^{n_1-q_1-1}\binom{n_1-1}{q_1+r}p^{q_1+r}(1-p)^{n_1-q_1-r-1}.$$

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa ketersediaan dari operasi join diperluas berdasarkan operasi penyusun dan fungsi karakteristik dari operasi join diperluas. Anggaplah bahwa ketersediaan dari C_3 yang dihasilkan dari operasi join diperluas adalah

$$AV(J_d) = \sum_{Q_3\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3)$$

Oleh karena C_3 yang dihasilkan dari operasi join diperluas dibentuk oleh 3 bentuk operasi maka

$$AV(J_d) = \sum_{A\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3) + \sum_{B\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3) + \sum_{C\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3)$$

1. Untuk $\sum_{A\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3)$ adalah ketersediaan dari korum-korum yang dibentuk oleh operasi $C_3 = (G_i-\{x\})\cup H_p$

   Oleh karena $(G_i-\{x\})\cup H_p$, fungsi karakteristiknya diberikan oleh

   $$\left\|(G_i-\{x\})\cup H_p\right\| = \binom{n_1-1}{q_1-1}\binom{n_2}{q_2}$$

   Sehingga ketersediann untuk

   $$AV_{(G_i-\{x\})} = \sum_{r=0}^{(n_1-1)-(q_1-1)}\binom{n_1-1}{(q_1-1)+r}p^{(q_1-1)+r}(1-p)^{n_1+(q_1-1)-r} = \sum_{r=0}^{n_1-q_1}\binom{n_1-1}{q_1+r-1}p^{q_1+r-1}(1-p)^{n_1+q_1-r-1}$$

   $$AV_{(H_p)} = \sum_{r=0}^{n_2-q_2}\binom{n_2}{q_2+r}p^{q_2+r}(1-p)^{n_2+q_2-r}$$

   Dengan demikian ketersediaan untuk operasi $(G_i-\{x\})\cup H_p$ diberikan oleh

   $$\sum_{A\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3) = \sum_{r=0}^{n_1-q_1}\binom{n_1-1}{q_1+r-1}p^{q_1+r-1}(1-p)^{n_1+q_1-r-1}\sum_{r=0}^{n_2-q_2}\binom{n_2}{q_2+r}p^{q_2+r}(1-p)^{n_2+q_2-r}$$

2. Untuk $\sum_{B\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3)$ adalah ketersediaan dari korum-korum yang dibentuk oleh operasi $C_3 = \left((G_i-\{x\})\cap\left(G_j-\{x\}\right)\right)\cup\left(H_p\cup H_q\right)$. Oleh

karena fungsi karakteristik dari $\left((G_i - \{x\}) \cap \left(G_j - \{x\}\right)\right) \cup \left(H_p \cup H_q\right)$ diberikan oleh persamaan

$$\left\|\left((G_i-\{x\})\cap\left(G_j-\{x\}\right)\right)\cup\left(H_p\cup H_q\right)\right\| = \sum_{a=1}^{q_1-1}\left(\binom{n_1-1}{q_1-a-1}\binom{n_2}{q_2+a}\right)$$

Sehingga ketersedian untuk

$$AV_{\left((G_i-\{x\})\cap\left(G_j-\{x\}\right)\right)} = \sum_{r=0}^{(n_1-1)-(q_1-a-1)}\sum_{a=1}^{q_1-1}\binom{n_1-1}{q_1-a-1+r}p^{(q_1-a-1)+r}(1-p)^{(n_1-1)+(q_1-a-1)-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n_1+a-q_1}\sum_{a=1}^{q_1-1}\binom{n_1-1}{q_1+r-a-1}p^{q_1+r-a-1}(1-p)^{n_1+q_1-a-r-2}$$

$$AV_{(H_p\cup H_q)} = \sum_{r=0}^{n_2-(q_2+a)}\sum_{a=1}^{q_1-1}\binom{n_2}{q_2+a+r}p^{q_2+a+r}(1-p)^{n_2+q_2+a-r}$$

Dengan demikian ketersediaan untuk operasi $\left((G_i - \{x\}) \cap \left(G_j - \{x\}\right)\right) \cup \left(H_p \cup H_q\right)$ diberikan oleh

$$\sum_{B\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3) = \sum_{r=0}^{n_1+a-q_1}\sum_{a=1}^{q_1-1}\binom{n_1-1}{q_1+r-a-1}p^{q_1+r-a-1}(1-p)^{n_1+q_1-a-r-2}\sum_{r=0}^{n_2-(q_2+a)}\sum_{a=1}^{q_1-1}\binom{n_2}{q_2+a+r}p^{q_2+a+r}(1-p)^{n_2+q_2+a-r}$$

$$\sum_{B\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3) = \left.\sum_{r=0}^{n_2-q_2-a}\binom{n_2}{q_2+a+r}p^{q_2+a+r}(1-p)^{n_2+q_2+a-r}\right)$$

3. Untuk $\sum_{C\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3)$ adalah ketersediaan dari korum-korum yang dibentuk oleh operasi $C_3 = G_i$. Oleh karena fungsi karakteristik dari $C_3 = G_i$ diberikan oleh persamaan

$$\|G_i\| = \binom{n_1-1}{q_1}$$

maka ketersediaan dari operasi ini diberikan oleh

$$\sum_{C\in C_3} f_C(Q)\,(Q_3,U_3) = \sum_{r=0}^{(n_1-1)-q_1}\binom{n_1-1}{q_1+r}p^{q_1+r}(1-p)^{(n_1-1)-(q_1+r)}$$

$$= \sum_{r=0}^{n_1-q_1-1}\binom{n_1-1}{q_1+r}p^{q_1+r}(1-p)^{n_1-q_1-1-r}$$

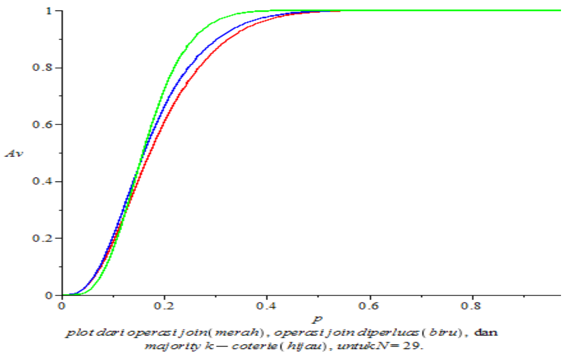
Berdasarkan pada ketersediaan dari ketiga bentuk operasi penyusun, maka ketersediaan untuk operasi join diperluas diberikan pada penggabungan koteri-k mayoritas diberikan oleh

$$AV(J_d) = \sum_{r=0}^{n_1-q_1}\binom{n_1-1}{q_1-1+r}p^{q_1-1+r}(1-p)^{n_1+q_1-r-1}\sum_{r=0}^{n_2-q_2}\binom{n_2}{q_2+r}p^{q_2+r}(1-p)^{n_2+q_2-r} + \sum_{a=1}^{q_1-1}\left(\sum_{r=0}^{n_1-q_1+a}\binom{n_1-1}{q_1-1-a+r}p^{q_1-a-1+r}(1-p)^{n_1+q_1-a-r-2}\sum_{r=0}^{n_2-q_2-a}\binom{n_2}{q_2+a+r}p^{q_2+a+r}(1-p)^{n_2+q_2+a-r}\right) + \sum_{r=0}^{n_1-q_1-1}\binom{n_1-1}{q_1+r}p^{q_1+r}(1-p)^{n_1-q_1-r-1}$$

Tabel 1 Perbandingan Nilai Ketersediaan Antara Koteri Mayoritas-3, Koteri-3 Gabungan (Operasi Join dan Operasi Join Diperluas) Untuk N = 29.

p	Koteri-3 Mayoritas	Operasi Join	Operasi Join

			Diperluas
0,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,2	0,7160535	0,6037933	0,6575446
0,4	0,9977984	0,9660434	0,9762713
0,6	0,9999996	0,9994961	0,9997046
0,8	1,0000000	0,9999998	1,0000000
1,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000



Gambar Grafik Perbandingan Nilai Ketersediaan Sistem untuk operasi join, operasi join diperluas, dan Koteri-3 mayoritas

IV. KESIMPULAN

Analisis ketersedian operasi join diperluas pada penggabungan koteri-*k* mayoritas tak-terdominasi yaitu menunjukkan hasil yang lebih baik jika dibandingkan dengan ketersediaan sistem koteri-*k* yang dihasilkan dari operas join oleh Neilsen. Ketersediaan yang lebih baik akan semakin nampak jika semakin banyak ukuran korum yang digabungkan dari suatu himpunan semesta dimana ketersedian dari operasi join akan mendekati satu atau sama dengan satu. Hal ini menjelaskan bahwa jika operasi join diperluas diterapkan kepenggunaan sumber daya walaupun ada terdapat kegalalan korum hampir dipastikan bahwa sistem tidak akan terganggu dan akan tetap berjalan.

UCAPAN TERIMAKASIH

Kepada semua yang terlibat dalam penelitian, peneliti tak lupa memberikan ucapan terimakasih atas sumbangsi dan saran yang telah memberikan sehingga penelitian ini dapat terselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

Agrawal, D. Dan El-Abbadi, A. 1991. *An efficient and fault-tolerant solution for distributed mutual exclusion.* ACM Trans. Comput. Systems 9(1), Hal.1-20.

Garcia-Molina, H., Barbara, D. 1985. *How to assign votes in a distributed system.* J. ACM 32(4), Hal. 841–860.

Jiang, Jhen-Ruey and Huang, Shing-Tsaan. 1994. *Obtaining Nondominated k-Coteries for Fault-Tolerant Distributed k-Mutual Exclusion*. Department of Computer Science National Tsing Hua University HsinChu, Taiwan, 30043 R. 0.C. by IEEE Transactions on Computer.

Kakugawa, Hirotsugo., et al. 1993. *Availability of k-Coterie*. IEEE Transactions on Computer. Vol. 42, No. 5.

Kakugawa, Hirotsugo., et al. 1994. *A distributed k-mutual exclusion algorithm using k-coterie*. Information Processing Letters 49. Vol 213-218.

Kuo, Yu-Chen and Wu, Po-Yao. 2008. *The Availability of Complemental k-Coteries*. Published by Oxford University Press on behalf of The British Computer Society.

Lamport, L. 1986. *The Mutual Exclusion Problem Part I: A Theory of Interprocess Communication*. National Science Foundation under grant number MCS-7816783.

Muhlis, L., Lawi, A., Amir, K. A. 2018. Operasi Join Koteri-*k* diperluas. Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi, Vol. 14, No. 2, 106-133.

Lawi, A., Oda, K., and Yoshida, T. 2005. *A Quorum Based Group k-Mutual Exclusion Algorithm for Oper Distributed Environments*. Parallel and Distributed Processing and Applications. Hal. 119-125.

Lawi, A., Oda, K., and Yoshida, T. 2006. *A Quorum based distributed conflictresolution algorithm for bounded capacity resources*. Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Vol. 4331, Springer Verlag-Berlin, Hal. 135-144.

Maekawa, M. 1985. *A* $\sqrt{n}$*algorithm for mutual exclusion in decentralized systems.* ACM Trans. Comput. Systems 3(2), Hal. 145-159.

Muhlis dan Lawi. 2019. Operasi Join diperluas pada koteri koteri-*k* mayoritas tak-terdominasi.

Manabe, Yoshifumi and Tajima, Naka. 2004. *(h, k)-Arbiters for h-out-of-k Mutual Exclusion Problem*. Theoretical Computer Science 310 (2004) 379-392.

Najafi, S. 2008. *A New GA - Based and Graph Theory Supported DistributionSystem Planning*, Vol. 2, No. 8.

Neilsen, Mitchell L. and Masaaki Mizuno. 1992.*Coterie Join Algorithm.* IEEE Transactions on Parallel and Distributed System, Vol. 3, No. 5, Hal. 759-765.

Neilsen, Mitchell L., and Mizuno, Masaaki. 1994. *Nondominated k-Coteries for Multiple Mutual Exclusion*. Information Processing Letters 50 (1994) 247-252.

Neilsen, Mitchell L. 1997. *Properties of Nondominated k-Coteries*. J. Systems Software *1997; 37~91-96 by Elsevier* Science Inc.

Peleg, David dan Avishai Wool. 1995. *The Availability of Quorum Systems*. Department of Applied Mathematics and Computer Science, The Weizmann Institute, Rehovot 76100, Israel. Hal. 210-223.

Rustam dan Armin Lawi. 2008. *Availability Comparison of Quorum Systems in Distributed Systems.* Proceeding of the 1st Makassar International Conference on Electrical Engineering and Informatics, Hasanuddin University, Makassar, Indonesia.

Saxena, P.C., Gupta, Sangita., and Rai, Jagmohan. 2001. Delay optimal coteries on regular symmetric networks. Computer Standards & Interfaces 23 (2001) 341–353.

Saxena, P.C., Gupta, Sangita., and Rai, Jagmohan. 2003. *A delay optimal coterie on the k-dimensional folded Petersen graph*. Journal of Parallel Distributed Computing 63 (2003) 1026–1035.