Volume 2, No. 1, Maret 2020

ISSN 2623-1638

JURNAL AXIOMATH

JURNAL MATEMATIKA DAN APLIKASINYA

Penerbit:
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Muslim Maros
email: axiomath@umma.ac.id

PENENTUAN SOLUSI PERSAMAAN DIFFERNSIAL BIASA MENGGUNAKAN MAPLE

Jalil, E[1)], Jusriani[2)], Zulfitri, W.F[3)]

[1)2)] *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Muslim Maros*

[1)]ernijalil@umma.ac.id

[2)] jusrianidjuddin@gmail.com

[2)]fiqahfmue@gmail.com

Abstract—Pada paper ini diperkenalkan penyelesaian sistem persamaan differensial orde-2, baik secara analitik maupun secara numerik. Penggunaan software maple dimaksudkan memudahkan setiap peneliti atau pembaca untuk menentukan solusi persamaan diferensial orde-n.

Kata Kunci— **Persamaan differensial, Maple**

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Persamaan differensial merupakan persamaan yang melibatkan turunan suatu fungsi yang tidak diketahui. Penggunaan persamaan differensial dapat ditemukan dalam bidang-bidang sains diantaranya, bidang ekonomi yang menyatakan perubahan harga terhadap waktu. Sedangkan dalam ilmu kimia dapat dinyatakan sebagai jumlah perubahan zat terhadap perubahan waktu, dalam ekologi menyatakan bahwa perubahan populasi terhadap waktu, dan masih banyak aplikasi yang lain. Ini menggambarkan bahwa persamaan differensial memiliki peranan penting dalam pengembangan ilmu sains.

Berdasarkan kondisi tersebut, maka setiap peneliti atau ilmuan yang menggunakan persamaan differensial harus dapat memahami bagaimana menentukan solusi persamaan differensial. Pada umumnya solusi persamaan differensial dapat ditentukan dengan dua acara yaitu secara analitik dan secara numerik. Tidak semua persamaan differensial dapat diselesaikan dengan cara analitik, sehingga dibutuhkan alat bantu software untuk menyelesaikan persamaan differensial secara numerik. Ada banyak software matematika yang dapat digunakan untuk seperti; Matlab, Matematica, Scilab, R programming, dan Maple.

Pada paper ini, digunakan Maple dengan pertimbangan bahwa Maple memiliki *interface Solve De Interactively* yang dapat memberikan solusi secara simbolik (Analitik) dan secara numerik. Sehingga penelitian ini focus pada penggunaan tools buit-in *Maple Solve DE Interactively* penyelesaian PD orde satu dan orde dua.

B. Persamaan Differensial

Beberapa pengertian terkait persamaan differensial yaitu; persamaan differensial merupakan suatu persamaan yang menghubungkan beberapa fungsi f dengan satu atau lebih turunannya [1]. Persamaan differensial melibatkan turunan yang menentukan bagaimana suatu kuantitas berubah [2]. Persamaan differensial adalah persamaan yang mengandung differensial-differensial atau diferensial koefisien [3] Persamaan diferensial dapat ditemukan di beberapa bidang ilmu seperti fisika, kimia, teknik dan astronomi, ilmu ekonomi dan lain sebagainya. Sedangkan dalam matematika, dapat dilihat terapannya pada geometri, analisis harmonic dan pemodelan.

Tidak sulit untuk menggambarkan persamaan differensial. Misalkan diberikan fungsi

$$y = f(x)$$

Turunan $\frac{df}{dx}$ dapat diinterpretasikan sebagai rata-rata perubahan f terhadap x. Dalam matematika disebut sebagai persamaan diferensial.

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu; persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Jika fungsi yang tak diketahui hanya bergantung pada satu variabel maka disebut PDB. Tetapi jika fungsi yang tidak diketahui bergantung lebih dari satu variabel maka disebut PDB [3]. Sebagai contoh;

$$\frac{df}{dx} = -k \quad (1)$$

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dxdy} = xy \quad (2)$$

Persamaan (1) merupakan persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan (2) termasuk persamaan diferebsial biasa.

Inti dari persamaan diferensial adalah PD memiliki solusi atau tidak. Ini dapat diketahui melalui nilai awal dan syarat batas yang diberikan.

Penyelesain persamaan diferensial dapat dilakukan dengan menggunakan metode tertentu yaitu

1) Metode integral langsung,
2) Metode pemisahan variabel,
3) Metode transformasi,
4) Persamaan diferensial eksak
5) Faktor pengintegralan dan
6) Persamaan differensial linear.

C. Solusi Persamaan Differensial

Misalkan diberikan suatu persamaann aljabar $ax^2 + bx + c = 0$, diketahui bahwa persamaan tersebut mempunyai solusi x_1, x_2 yang tidak diketahui. Demikian halnya persamaan differensial $y' = f(x)$, juga memiliki solusi yang tak diketahui namun solusinya dalam bentuk fungsi.

Solusi persamaan differensial dibedakan menjadi tiga jenis yaitu;

1) Solusi implisit atau eksplisit
   Dikatakan solusi implisit jika solusi PD berbentuk implisit, sedangkan solusi eksplisit jika solusi PD berbentuk eksplisit.
2) Solusi umum dan solusi khusus
   Dikatakan solusi umum jika solusi PD memuat konstanta integtasi (c), sedangkan solusi khusu jika konstanta integrase telah ditentukan nilainya dengan menggunakan nilai awal dan syarat batas.
3) Solusi Singular
   Solusi singular dapat juga disebut sebagai solusi tambahan, dimana nilai c pada solusi umum tidak bias ditentukan nilainya.

D. Maple

Maple merupakan salah satu aplikasi matematika yang dapat digunakan secara interaktif dalam system aljabar. Maple memiliki banyak kelebihan diantaranya [4];

1) Dapat melakukan komputasi integet dengan tepat.
2) Dapat melakukan perhitungan numerik dengan digit tertentu.
3) Dapat melakukan komputasi secara simbolik
4) Memuliki fungsi *buit-in* dan package untuk melakukan berbagai macam tugas matematika.
5) Memiliki fasilitas plot dua dan tiga dimensi.
6) Memiliki *worksheet-based* interface.
7) Merupakan Bahasa pemrograman sederhana

II. METODE PENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Tahapan yang dilakukan dalam memperole informasi pada penelitian ini adalah

1) Mengumpulkan data/referensi yang berkaitan dengan persamaan differensial.
2) Mengumpulkan data/referensi yang berkaitan dengan MAPLE
3) Menentukan solusi umum dan solusi khusus beberaoa kasus persamaan differensial secara analitik
4) Menentukan solusi umum dan khusu persamaan differensial menggunakan Maple.
5) Melakukan visualisasi solusi persamaan differensia.

B. Tahap Perancangan Penelitian

Tahap perancangan penelitian meliputi;

1) Mencari informasi terkait peranan persamaan differensial dalam berbagai bidang ilmu.
2) Mencari informasi terkait pemanfaatan software Maple dalam bidan matematika.
3) Membuat langkah-langkah penyelesaian PD menggunakan Maple interaktif.

III. PEMBAHASAN

Kasus I.

Tentukan solusi dari persamaan berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}, y(1) = 1$$

Solusi Analitik;

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy} \\ 2xy\,dy &= (4x^2 + 3y^2)dx \\ 2xy\,dy - (4x^2 + 3y^2)dx &= 0 \end{aligned}$$

Subtitusi $v = \frac{y}{x}$ maka $y = vx, dy = vdx + xdv$

Persamaan menjadi

$$\begin{aligned} (4x^2 + 3v^2x^2)dx - 2vx^2(vdx + xdv) &= 0 \\ (4x^2 + 3v^2x^2 - 2v^2x^2)dx - 2vx^2dv &= 0 \\ (4 + 3v^2 - 2v^2)dx - 2vxdv &= 0 \end{aligned}$$

Atau

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} - \frac{2v}{4 + v^2}dv &= 0 \\ \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2v}{4 + v^2}dv &= 0 \\ \ln x - \ln(4 + y^2) &= C_1 \\ \ln x + \ln C &= \ln(4 + v^2) \\ Cx &= 4 + v^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Cx &= 4 + \frac{y^2}{x^2} \\
Cx^3 &= 4x^2 + y^2 \\
y^2 &= Cx^3 - 4x^2 \\
y &= \pm\sqrt{Cx^3 - 4x^2}
\end{aligned}
$$

Diketahui $y(1) = 1$, maka diperoleh nilai konstanta C,

$$C(1)^3 = 4(1)^2 + 1^2 = 5$$

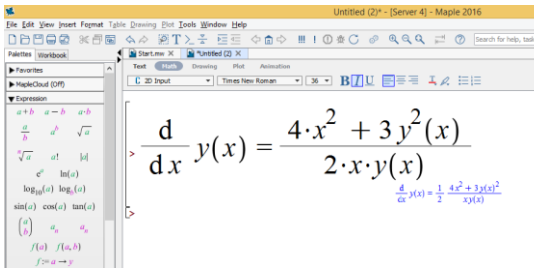
Jadi, solusi

$$y = \pm\sqrt{5x^3 - 4x^2} = \pm x\sqrt{5x - 4}$$

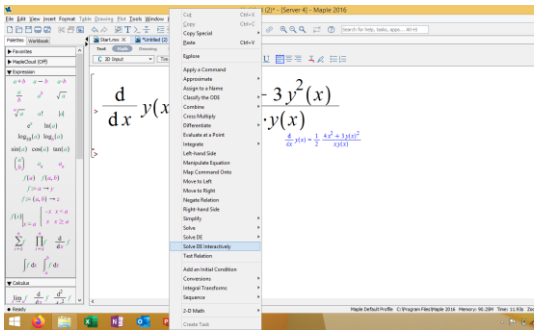
Solusi Menggunakan MAPLE

Langkah penyelasina menggunakan MAPLE

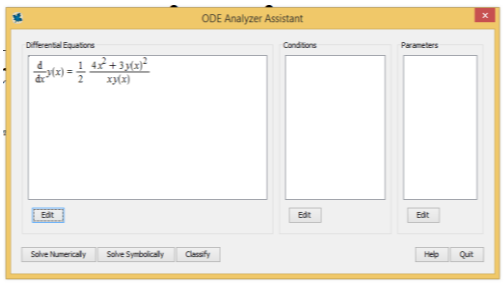
1) Tuliskan persamaannya di commad MAPLE



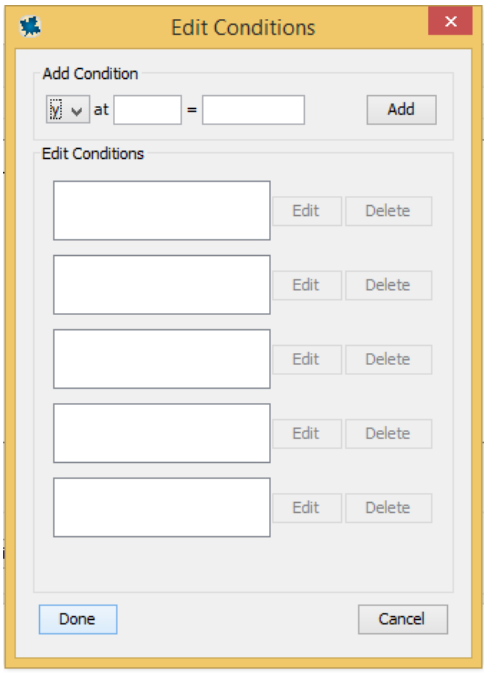
2) Klik kanan pada bagian persamaan pilih *solve DE interactively*



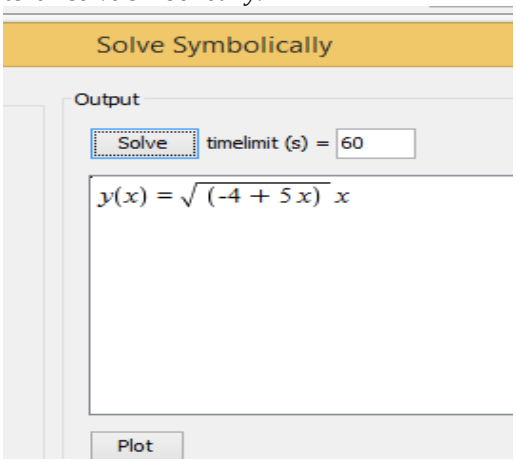
3) Setelah muncul grafik seperti berikut



Klik tombol edit pada bagian *condition*, akan muncul di monitor grafik seperti berikut,



Input di texbox pertama dan kedua dengan nilai satu. Klik add kemudian done. Selanjutnya, tekan *solve simbolically.*

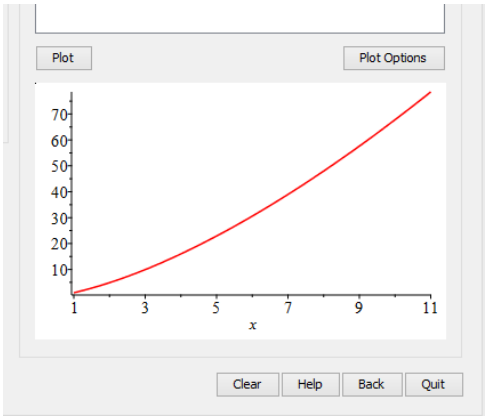


Diperoleh solusi dari persamaan

$$y(x) = \sqrt{-4 + 5x}\, x$$

Selanjutnya, untuk melengkapi penyelesaian persamaan differensial, digunakan *tools plot*

Selanjutnya klik *plot*



Diperoleh grafik solusi persamaan yang menjelaskan bahwa peningkatan variable bebas x akan menyebabkan peningkatan terhadap variable terikat y.
Selnajutnya, pada grafik, pilih solution pada *on quict return*, klik *Quit*. Diperoleh solusi pada comman

```
dsolve[':-interactive'](diff(y(x),
x) = (4*x^2+3*y(x)^2)/(2*x*y(x)))

        y(x) = sqrt(-4+5*x)*x
```

Hasil yang diperoleh sesuai dengan hasil anliitik pada langkah pertama.

Kasus II.
Diberikan persamaan differential system massa pegas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \quad k\,x(t) = 0, \frac{dx}{dt} = 2\frac{m}{s}, x(0) = 3$$

Dengan $m = 4$ massa benda dan $k = 3$ konstanta pegas. Tentukan soluis persamaan di atas.
Penyelesaian:
Solusi Analitik

Misalkan $x = e^{rt}$, diperoleh $\frac{dx}{dt} = re^{rt}, \frac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt}$, dengan mensubstitusikan ke persamaan,

$$\begin{aligned} 4\frac{d^2}{dt^2}(e^{rt}) &= -3e^{rt} \\ 4r^2(e^{rt}) &= -3e^{rt} \\ 4r^2 &= -3 \\ r^2 &= -\frac{3}{4} \\ r &= \pm\sqrt{-\frac{3}{4}} \\ r &= \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sunstitusi balik nilai r,

$$x(t) = ae^{i\frac{1}{2}\sqrt{3}t} + be^{-i\frac{1}{2}\sqrt{3}t}$$

Dengan menggunakan nilai awal dan syarat batas yaitu $\frac{dx(0)}{dt} = 2$ dan $x(0) = 3$,

$$x(0) = ae^{i\frac{1}{2}\sqrt{3}0} + be^{-i\frac{1}{2}\sqrt{3}0} = 3$$
$$a + b = 3.$$
$$x'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}i\ a\ e^{i\frac{1}{2}\sqrt{3}(0)} - \frac{1}{2}\sqrt{3}ibe^{-i\frac{1}{2}\sqrt{3}(0)} = 2$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{3}i\ (a\ - b) = 2$$
$$(a - b) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}i$$

Sehingga,

$$a + b = 3.$$
$$(a - b) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}i$$
$$a = \frac{(9 - 4\sqrt{3}i)}{6}$$
$$b = 3 - \frac{(9 - 4\sqrt{3}i)}{6}$$
$$b = \frac{(9 + 4\sqrt{3}i)}{6}$$

$$x(t) = \frac{(9-4\sqrt{3}i)}{6}e^{i\frac{1}{2}\sqrt{3}t} + \frac{(9+4\sqrt{3}i)}{6}e^{-i\frac{1}{2}\sqrt{3}t}$$

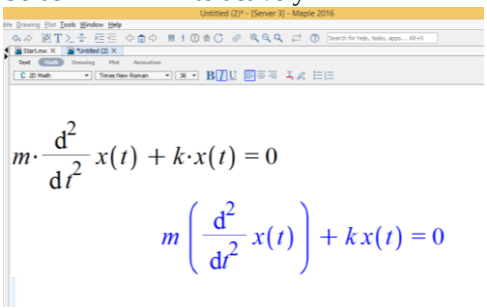
Dengan menjabarkan persamaan ini diperoleh

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

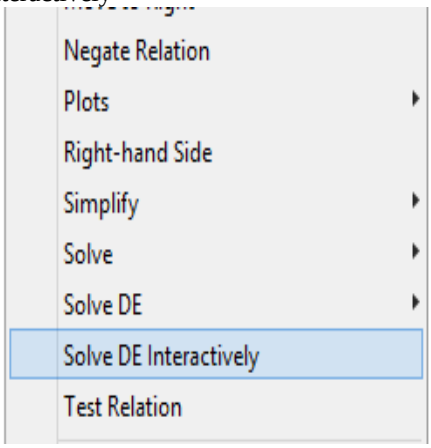
Dengan deminkian solusi persamaan differensial adalah

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

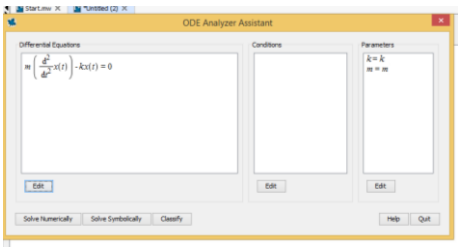
Solusi Analitik
Solusi MAPLE Interactively



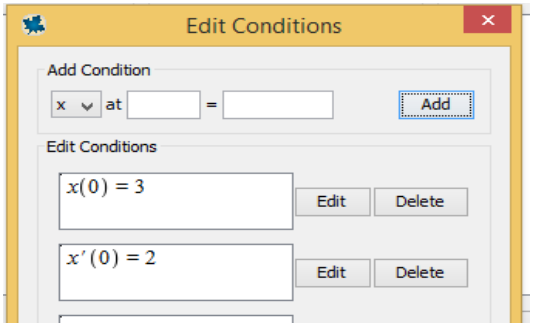
Klik kanan pada persamaan, pilih Solve DE Interactively

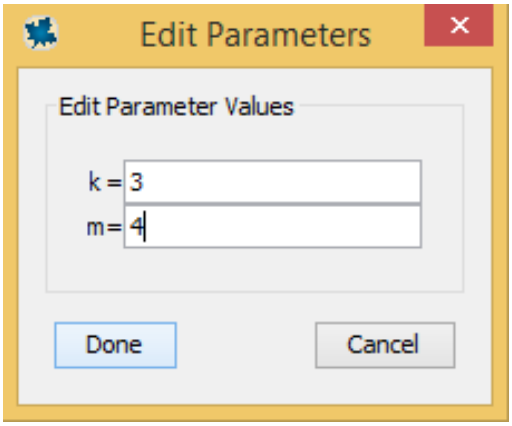


Tampil pada *screen computer* seperti gambar berikut,

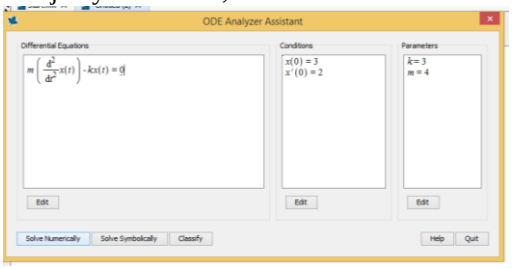


Pada bagian *condition*, input nilai awal dan syarat batas, $\frac{dx}{dt} = 2\,m/s$ dan $x(0) = 3$. Sedangkan pada bagian parameter input, $k = 3, m = 4\,kg$. Kedua-duanya dilakukan dengan cara mengklik edit pada masing-masing bagian diperoleh dua gambar berikut,

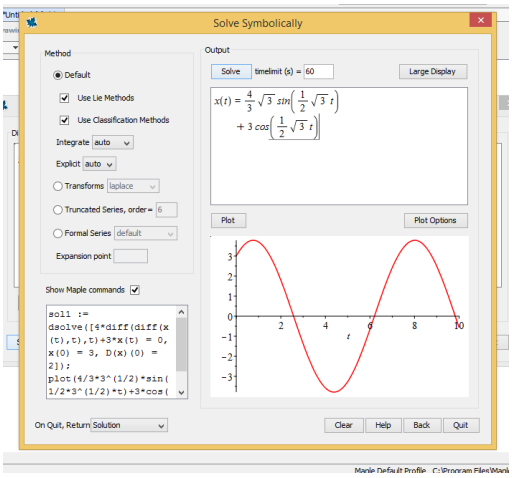




Selnjutnya klik *done*,



Pilih *solve sombolically*, klik solve dan plot. Diperoleh gambar berikut,



Pada on Quit return, pilih solution. Langkah terakhir keluar dari DE Interactively dengan mengklik Quit. Diperoleh solusi persamaan differensial system massa pegas.

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k \cdot x(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE interactively}}$$

$$x(t) = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) + 3\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)$$

Hasil yang diperoleh bersesuain dengan cara analitik yang diselesaik dan secara manual.

IV. KESIMPULAN

Kesimpulan dari paper ini adalah dengan menggunakan MAPLE Solve DE Atractively mempermudah dalam menentukan solusi persamaan differensial orde-n dengan disertai grafik solusi persamaan diferensialnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. G. Krantz, Differential Equations Demistified A self Teaching Guide, USA: United State, 2005.

[2] S. Holzner, Differential Equations For Dummies, Canada: Willey Publishing, 2008.

[3] R. Riogilang, Persamaan Differensial, Bandung: Binacipta, 1983.

[4] R. Maya, Persamaan Diferensial Biasa Edisi Ke-Enam, Bandung, 2014.

[5] F. Garvan, The Maple Book, New York: A CRC, 2002.