Volume 2, No. 1, Maret 2020

ISSN 2623-1638

JURNAL AXIOMATH

JURNAL MATEMATIKA DAN APLIKASINYA

Penerbit:
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Muslim Maros
email: axiomath@umma.ac.id

NILAI KETIDAKTERATURAN PADA GRAF BUKU SEGITIGA

Riskawati[1)], Ekawati, S[2)],Kasmirah[3)]

[1)2)3)]*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,*
Universitas Muslim Maros
Jln. Dr. Ratulangi No 62, Maros

[1)]riskawati@umma.ac.id
[2)]susiekawati@umma.ac.id
[3)]kasmirah18072001@gmail.com

Abstract— **Misalkan *G(E,V)* adalah suatu graf sederhana. Pelabelan sisi $\lambda: E \rightarrow \{1, 2, \dots, w\}$ disebut pelabelan$-w$ tidak tearatur (*irregular labeling*) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V berlaku $wt(x) \neq wt(y)$ dimana $wt(x) = \sum_{xu \in E(G)} \lambda(xu)$. Nilai ketidakteraturan dari G, dinotasikan dengan $s(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil w sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan$-w$ tidak teratur. Pada penelitian ini, nilai ketidakteraturan pada graf buku segitiga yang dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil.**

Kata Kunci— **Graf buku segitiga, nilai ketidakteraturan.**

I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi atau garis. Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan pada graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan sisi dan titik dapat dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah dengan melabelinya dengan bilangan. Ada beberapa pelabelan graf yang telah dikembangkan, antara lain pelabelan gracefull, pelabelan harmoni, pelabelan total tidak teratur, pelabelan ajaib dan pelabelan anti-ajaib.

Topik penelitian ini adalah pelabelan tidak teratur. Konsep pelabelan tidak teratur pada suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (1986). Pelabelan tidak teratur pada graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan sisi dari G ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,w\}$ sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Bobot titik x pada pelabelan ini adalah jumlah semua label sisi yang terkait pada x. Nilai ketidakteraturan (*Irregular labeling*) dari G, dinotasikan dengan $s(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil w sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan w tidak teratur.

Hingaa saat ini, penentuan nilai ketidakteraturan dari semua graf belum dapat dilakukan secara lengkap. Penentuan nilai ketidakteraturan pada graf telah dikaji oleh beberapa ahli. Chartrand dkk. 1986, menentukan nilai ketidakteraturan pada graf regular-*d*. Anolcher dan Palmer, pada tahun 2012 menentukan nilai total pada graf *circulant.* Pada tahun 2013, Jakub membandingkan nilai ketidakteraturan pada beberapa graf. Selanjutnya, Jakub melakukan pengembangan dengan membandingkan nilai ketidakteraturan dengan batas bawah pada beberapa graf yang berderajat minimum pada tahun 2017. Pada tahun 2019, Riskawati dkk. Telah menentikan nilai ketidakteraturan pada graf *series parallel*.

Graf buku segitiga merupakan famili dari graf Komplit Tripartite. Karakteristik yang menarik dari graf Buku Segitiga adalah sebagian besar titiknya berderajat dua. Pada tahun 2015, Meilin telah menentukan nilai total ketidakteraturan pada graf Buku Segitiga, namun belum menentukan nilai ketidakteraturan graf Buku Segitiga. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang penentuan nilai ketidakteraturan pada garaf buku segitiga.

II. METODEPENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Pemahaman mengenai

masalah nilai ketidakteraturan sangat membantu dalam penyelesaian pelabelan tersebut.

B. Tahap Rancangan Penelitian

Penentuan nilai ketidakteraturan pada graf buku segitiga dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya, sedangkan batas atas dianalisis dengan pemberian label sisi pada graf buku segitiga. Jika batas bawah sama dengan batas atas maka diperoleh nilai ketidakteraturan yang eksak.

C. Tahap Kesimpulan

Pada tahap ini kesimpulan ditarik dari nilai batas bawah dan batas atas sehingga diperoleh nilai ketidakteraturanpada graf buku segitiga.

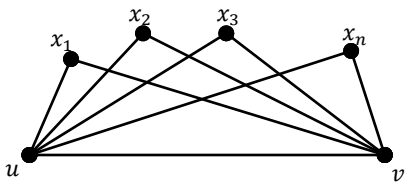
III. HASILDANPEMBAHASAN

A. Graf Buku Segitiga

Graf buku segitiga didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Graf buku segitiga yang dinotasikan dengan BT_n merupakan famili dari graf Komplete Tripartite $K_{1,1,n}$. Graf buku segitiga terdiri dari 3 partisi himpunan bagian titik-titik v_1, v_2 dan v_n, dimana masing-masing himpunan terdiri dari 1,1, dan n titik.



Gambar 1 Graf Buku Segitiga BT_n

Didefinisikan himpunan titik $V = \{u, v, x_i | \ i = 1,2, \dots, n\}$ dan himpunan sisi $E = \{uv, ux_i, vx_i | i = 1,2, \dots, n\}$.

B. Nilai Ketidakteraturan Graf Buku Segitiga

Definisi 2

Misalkan $G(V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Pelabelan sisi $\lambda: E \to \{1,2,3, \dots, w\}$ disebut pelabelan$-v$ tidak teratur (irregular w-labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V, berlaku $wt(x) \neq wt(y)$. Dimana

$$wt(x) = \sum_{xu \in E(G)} \lambda(xu)$$

Definisi 3

Nilai ketidakteraturan (*irregularity strength*) *dari G, dinotasikan dengan $s(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil w sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan$-w$ tidak teratur.*

Penentuan nilai ketidakteraturan pada beberapa jenis graf telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Pada tahun 1998, Amar dkk. telah menetukan batas bawah nilai ketidakteraturan pada graf pohon, $s(T) \geq \max_{0 \leq i \leq \Delta} \frac{n_i + i - 1}{i}$. Jakub (2008) menentukan nilai ketidakteraturan sebuah graf regular$-d$ yang memiliki sebanyak n titik, tanpa memuat titik dan sisi yang terisolasi, memperoleh hasil $s(G) = 16\frac{n}{d}$. Anolcher dkk. (2012), menentukan nilai ketidakteraturan pada graf circulant, jika $k \geq 2$ dan $n \geq 2k + 1$, memperoleh hasil

$$s(C_n^k) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2k-1}{2k+1} \right\rceil + 1, & n = 2k+1 \\ \left\lceil \frac{n+2k-1}{2k+1} \right\rceil, & yang\ lain \end{cases}$$

Chatrand dkk. (1986) telah menentukan batas bawah pelabelan ketidakteraturan pada graf reguler sebagai berikut.

Teorema 1

Misalkan G adalah suatu graf regular$-d$ maka batas bawah nilai ketidakteraturan pada graf G, untuk $d \geq 2$ adalah sebagai berikut

$$s(G) \geq \left\lceil \frac{n + d - 1}{d} \right\rceil.$$

Dalam penentuan nilai ketidakteraturan pada graf buku segitiga, diawali dengan memberikan label sisi dengan mempertimbangkan hal berikut:

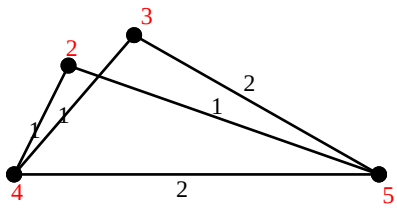
1. Batas bawah dengan menggunakan Teorema 1
2. Batas atas dengan pemberian label sisi
3. Memastikan bobot setiap titik berbeda
4. Mempertahankan pola pemberian label sisi.

Berdasarkan Teorema 1, untuk $n = 2,3,4$,batas bawah nilai ketidakteraturan pada graf buku segitiga dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

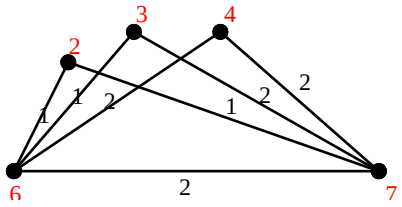
Tabel 1 Batas Bawah Pelabelan Sisi $BT(n)$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{n_\delta}$	$\boldsymbol{BT(n) \leq \left\lceil \frac{n_\delta + \delta - 1}{\delta} \right\rceil}$
4	2	2	2
5	2	3	2
6	2	4	3

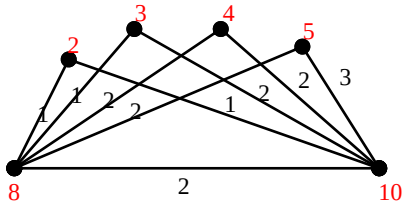
Selanjutnya untuk menetukan batas atasnya, maka setiap sisi pada graf buku segitiga untuk $n = 4,5,6$ diberi label sebagai berikut.



Gambar 2 Pelabelan-2 sisi $s(BT(4))$



Gambar 3 Pelabelan-2 sisi $s(BT(5))$



Gambar 4 Pelabelan-3 sisi $s(BT(6))$

Dengan demikian diasumsikan bahwa nilai ketidakteraturan pada graf buku segitiga yaitu $s(BT(n)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$. Hasil yang dituliskan pada Teorema 2 yang disertai dengan bukti sebagai berikut.

Teorema 2
Untuk $n \geq 4$, maka nilai ketidakteraturan dari graf buku segitiga $BT(n)$ adalah

$$s(BT(n)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Bukti:
Untuk membuktikan bahwa $s(BT(n)) \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$, maka digunakan Teorema 1 karena karakteristik dari graf buku segitiga didominasi oleh titik yang berderajat dua. Derajat minimum dari $BT(n)$ adalah $\delta = 2$, banyaknya titik yang berderajat 2 adalah $n_2 = n - 2$. maka berdasarkan Teorema 1 diperoleh

$$\begin{aligned} s(BT(n)) &\geq \left\lceil \frac{n_\delta + \delta - 1}{\delta} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{(n-2) + 2 - 1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$s(BT(n)) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Untuk membuktikan hal tersebut dilakukan konstruksi pelabelan sisi pada graf buku segitiga dan misalkan $t = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

Konstruksi suatu pelabelan total λ pada $BT(n)$
Untuk $i = 1,2,\dots,n-2$ maka konstruksi pelabelan sisi didefinisikan sebagai sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda(uv) &= 2 \\ \lambda(ux_i) &= \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \\ \lambda(ux_i) &= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap titik pada $BT(n)$ berbeda untuk $i = 1,2,\dots,n-2$. Perhatikan bahwa

1. $$\begin{aligned} wt(x_i) &= \lambda(ux_i) + \lambda(vx_i) \\ &= \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil \\ &< \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(i+1)+1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil \\ &= wt(x_{i+1}) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} wt(x_{i+1}) &= \lambda(ux_{i+1}) + \lambda(vx_{i+1}) \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(i+1)+1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil \\ &< \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \\ &= wt(x_n) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} wt(x_n) &= \lambda(ux_n) + \lambda(vx_n) \\ &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \\ &< \left(\sum_{i=1}^{n-2} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \right) + 2 \\ &= wt(u) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} wt(u) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} \lambda(ux_i) + \lambda(uv) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-2} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \right) + 2 \\ &< \left(\sum_{i=1}^{n-2} \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil \right) + 2 \\ &= wt(v) \end{aligned}$$

5. $wt(v) = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda(vx_i) + \lambda(uv)$
$= \left(\sum_{i=1}^{n-2} \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil\right) + 2$

Berdasarkan definisi bobot titik tersebut, diperoleh $wt(x_1) < wt(x_{i+1}) < \cdots < wt(x_n) < wt(u) < wt(v)$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bobot setiap titik pada $BT(n)$ berbeda. Maka λ yang dikonstruksikan tersebut merupakan suatu pelabelan tidak teratur pada $BT(n)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ sebagai berikut.

Untuk $i = 1,2, \ldots, n-2$

1. $\lambda(ux_i) \leq \lambda(ux_{n-2}) = \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil < \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$

2. $\lambda(vx_i) \leq \lambda(vx_{n-2}) = \left\lceil \frac{(n-2)+1}{2} \right\rceil$
$= \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$

3. $\lambda(uv) = 2 \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$

Dengan demikian λ merupakan suatu pelabelan$-t$ total tidak teratur titik dengan $t = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$, untuk $n \geq 4$, artinya $s(BT(n)) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$. Karena $s(BT(n)) \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$dan $s(BT(n)) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$, maka

$$s(BT(n)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \qquad \blacksquare.$$

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan penelitian, diperoleh kesimpulan bahwa nilai ketidakteraturan pada graf buku segitiga *untuk* $n \geq 4$ yaitu$s(BT(n)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$. Pembahasan mengenai pelabelan tidak teratur masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini dan dapat juga melakukan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graf yang berbeda.

UCAPAN TERIMAKASIH

Kami ucapkan terimakasih pada semua tim peneliti yang telah memberisumbangsih pengetahuandan saran.

DAFTAR PUSTAKA

Amar, D dan Togni, O. (1998). Irregularity Strength og Trees. *Discrete Mathematics*. 190 : 15-38

Anolcher M. & Palmer C.(2012). Irregular Labelings of Circulant Graphs. *Discrete Mathematics*.312 : 3416-3466.

Chartrand G.*et al*.(1986). *Irregular networks*.Proc. of the 250th Anniversary Conf. on Graph Theory. Fort Wayne: Indiana.

Jakub, P. (2008). Irregularity Strength of Regular Graph. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 15 : 1-10.

Jakub, P. (2013). Distant Irregularity Strength Of Graph. *Discrete Mathematics*. 313 : 2875-2880.

Jakub, P. (2017). Distant irregularity strength of graphs with bounded minimum degree. Discrete Appl. Math. 233 : 159-165.

Meilin, I.T., Salman, A. N. M., dan Persulessy, E. R. (2015). On The Total Irregularity Strength of Fun, Wheel, Triangular Book and Friendship Graphs. *Procedia Computer Science*. 74 : 124-131.

Riskawati dan Hinding, N. (2019). Nilai Ketidakteraturan Graf Series Parallel. *Axiomath : Jurnal Matematika dan Aplikasinya*. 1 : 5-9.