NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA GRAF SERIES PARALLEL

Riskawati[1], Nurdin[2],Kasmirah[3]

[1] *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,*
Universitas Hasanuddin
Jln. Dr. Ratulangi No 62, Maros

[2] *Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,*
Universitas Hasanuddin
Jln. Perintis Kemerdekaan, KM 10, Makassar

[3] *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,*
Universitas Hasanuddin
Jln. Dr. Ratulangi No 62, Maros

[1]riskawati02@gmail.com
[2]nurdin1701@yahoo.com
[3]kasmirah18072001@gmail.com

Abstract— **Penentuan nilai total ketidakteraturan titik dari semua graf belum dapat dilakukan secara lengkap. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *series parallel* $sp(m,r,2)$ untuk $m,r \geq 3$. Penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *series parallel* dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya, sedangkan batas atas dianalisis dengan pemberian label pada titik dan sisi pada *series parallel.* Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh nilai total ketidakteraturan titik pada *series parallel,* $tvs(sp(m,r,2)) = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$, untuk $m,r \geq 3$.**

Kata Kunci— **Graf *series parallel*, nilai total ketidakteraturan titik.**

I. PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkembangsaan Swiss, pada tahun 1736. Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan pada graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack, kemudian dilanjutkan oleh Stewart, Kotzig, dan Rosa (Kotzig & Rosa, 1970).

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf ke suatu himpunan bilangan. Suatu pelabelan dengan domain berupa himpunan titik dari suatu graf disebut pelabelan titik, sedangkan pelabelan dengan domain berupa himpunan sisi dari suatu graf disebut pelabelan sisi. Apabila domain dari pemetaan tersebut adalah gabungan himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (Wallis, 2001).

Pelabelan sisi dan titik dari graf dapat dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Konsep pelabelan tidak teratur pada suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand. Pada tahun 2007, Baca memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya yaitu pelabelan nolai total ketidakteraturan titik. Pelabelan total tidak teratur titik pada graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan titik dan sisi dari G ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,k\}$ sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Bobot titik x pada pelabelan ini adalah jumlah label titik dan semua label sisi yang terkait pada x. Nilai total tidak teratur titik (*total vertex irregularity strength*) dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan total tidak teratur titik.

Beberapa ahli telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik dari beberapa graf. Nurdin *et al*(2010), menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf pohon.Rajasingh *et* *al* (2012), menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf barisan segitiga. Ahmad *et al*(2014), menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada beberapa kelas khusus *uncyclic*.

Pada tahun 2015, Rajasingh telah menentukan nilai total ketidakteraturan sisi pada graf *series parallel* (Rajasingh &Arockiamary, 2015). Namun belum menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *series parallel*. Penelitian ini bertujuan untukmenentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil sehingga diperoleh nilai ketidakteraturan pada graf *series parallel* yang eksak.

II. METODE PENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Pemahaman mengenai masalah nilai total ketidakteraturan titik sangat membantu dalam penyelesaian pelabelan tersebut.

B. Tahap Rancangan Penelitian

Penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *series parallel* dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya, sedangkan batas atas dianalisis dengan pemberian label titik dan sisi pada *series parallel.* Jika batas bawah sama dengan batas atas maka diperoleh nilai ketidakteraturan yang eksak.

C. Tahap Kesimpulan

Pada tahap ini kesimpulan ditarik dari nilai batas bawah dan batas atas sehingga diperoleh nilai total ketidakteraturan titik.

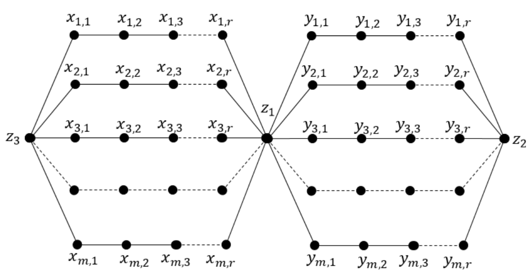
III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Graf Series Parallel

Graf *series parallel* didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1 (Rajasingh,2015)

Graf series parallel pada G adalah suatu graf rantai dimana setiap bloknya merupakan graf theta yang diperumum. Graf Series parallel dinotasikan dengan $sp(m,r,l)$.



Gambar 1 Graf *Series Parallel* $sp(m,r,2)$

Gambar 1 menunjukkan graf *series parallel* untuk $l = 2$.

Didefinisikan himpunan titik $V = \{x_{i,j}, y_{i,j} \mid j = 1,2,\dots,r\} \cup \{z_1, z_2, z_3\}$ dan himpunan sisi $E = \{z_3x_{i,1}, z_1x_{i,r}, z_1y_{i,1}, z_2y_{i,r}\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1} \mid j = 1,2,\dots,r-1\}$, untuk suatu $i = 1,2,\dots,m$.

B. Nilai Total Ketidakteraturan Titik Series Parallel

Definisi 2 (Rajasingh,2015)

Misalkan $G(V,E)$ adalah suatu graf sederhana. Pelabelan sisi $f: V \cup E \to \{1,2,3,\dots,k\}$ disebut pelabelan$-k$ total tidak teratur titik (total vertex irregular k-labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V, berlaku $wt(x) \neq wt(y)$. Dimana

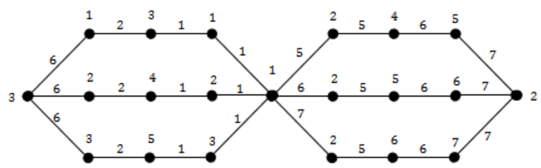
$$wt(x) = f(x) \sum_{xu \in E(G)} f(xu)$$

Teorema 1 (Nurdin *et al*,2010)

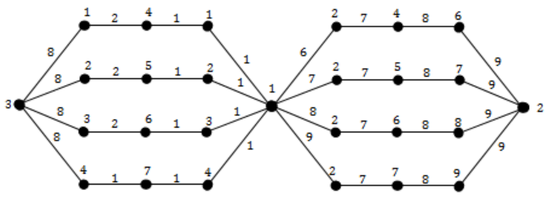
Misalkan G adalah suatu graf yang mempunyai n_i titik berderajat i dengan $i = \delta, \delta+1, \delta+2, \dots, \Delta$ dengan δ dan Δ adalah derajat minimum dan maksimum titik dari G maka

$$tvs(G) \geq maks\left\{\left\lceil\frac{\delta + n_\delta}{\delta+1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta+2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{\delta + \sum_\delta^\Delta n_i}{\Delta}\right\rceil\right\}$$

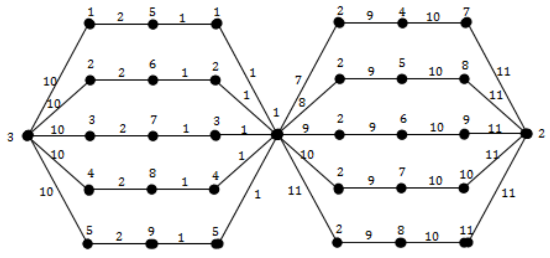
Dalam penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada pada graf *series parallel*, diawali dengan menentukan batas bawah dan batas atas. Batas bawah *series parallel* untuk $m = 4,5,6$ dan $r = 3$ dianalisis dengan menggunakan sifat-sifat *series parallel* serta berdasarkan Teorema 1. Sedangkan batas atas dianalisis dengan pemberian label sisi pada graf *series parallel* $sp(m,r,2)$ untuk $m = 3,$ dan $r = 3$ (lihat Gambar 2) dengan mempertahankan pola pelabelan. Berdasarkan Gambar 2 diperoleh nilai total ketidakteraturan titik *series parallel* untuk $m = 3,$ dan $r = 3, tvs(sp(m,r,2)) = 9$.



Gambar 1 Pelabelan-*7* Total $tvs(sp(3{,}3{,}2))$



Gambar 2 Pelabelan-*9* Total $tvs(sp(4,3,2))$



Gambar 3 Pelabelan-*11* Total $tvs(sp(5,3,2))$

Hal yang sama dilakukan untuk sebarang m dan r dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Nilai Total Ketidakteraturan Titik $sp(m,r,2)$

	3	4	5	$\cdots$	r
3	7	9	11	$\cdots$	$\left\lceil\frac{(2.3.r)+2}{3}\right\rceil$
4	9	12	14	$\cdots$	$\left\lceil\frac{(2.4.r)+2}{3}\right\rceil$
5	11	14	18	$\cdots$	$\left\lceil\frac{(2.5.r)+2}{3}\right\rceil$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$\left\lceil\frac{(2.m.3)+2}{3}\right\rceil$	$\left\lceil\frac{(2.m.4)+2}{3}\right\rceil$	$\left\lceil\frac{(2.m.5)+2}{3}\right\rceil$	$\cdots$	$\left\lceil\frac{(2mr)+2}{3}\right\rceil$

Berdasarkan Tabel 1diasumsikan bahwa nilai total ketidakteraturan titik pada graf *series parallel* yaitu $tvs\big(sp(m,r,2)\big) = \left\lceil\frac{(2mr)+2}{3}\right\rceil$. Hasil ini dituliskan pada Teorema sebagai berikut.

Teorema 2 Untuk $m \geq 3$ dan $r \geq 3$, maka nilai total ketidakteraturan titik dari graf *series parallel*$sp(m,r,2)$ adalah

$$tvs(sp(m,r,2)) = \left\lceil\frac{(2mr)+2}{3}\right\rceil.$$

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $tvs\big(sp(m,r,2)\big) = \left\lceil\frac{2mr+2}{3}\right\rceil$ maka digunakan Teorema 1. Derajat minimum dari $sp(m,r,2)$ adalah $\delta = 2$, banyaknya titik yang berderajat 2 adalah $n_2 = 2mr$. Selanjutnya derajat terkecil kedua adalah m dengan banyak titik m adalah $n_m = 2$ dan derajat maksimum adalah $2m$ dengan banyak titik $2m$ adalah $n_{2m} = 1$. Maka berdasarkan Teorema 1 diperoleh

$tvs(G)$

$$\geq maks\left\{\left\lceil\frac{\delta+n_\delta}{\delta+1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta+n_\delta+n_{\delta+1}}{\delta+2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{\delta+\sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta+1}\right\rceil\right\}$$

sehingga

$tvs\big(sp(m,r,2)\big)$

$$\geq maks\left\{\left\lceil\frac{2mr+2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{2mr+m+4}{m}\right\rceil, \left\lceil\frac{2mr+3m+3}{2m+1}\right\rceil\right\}$$

$$= \left\lceil\frac{2mr+2}{3}\right\rceil.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $s\big(sp(m,r,2)\big) \leq \left\lceil\frac{2mr+2}{3}\right\rceil$. Untuk membuktikan hal tersebut akan dikonstruksi suatu pelabelan total tidak teratur titik pada *series parallel* $sp(m,r,2)$, misalkan $t = \left\lceil\frac{2mr+2}{3}\right\rceil$.

Konstruksi suatu pelabelan total f pada $sp(m,r,2)$

Untuk $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 2,3,\dots,r-1$ maka konstruksi pelabelan total sebagai berikut.

$f\big(x_{i,1}\big) = t - \left(\frac{m}{3}(2r-2) - i + 3\right)$

$f\big(x_{i,j}\big) = t - \left(\frac{m}{3}(r+j-1) - i + 1\right)$

$f\big(x_{i,r}\big) = t - \left(\frac{2mr}{3} - i + 1\right)$

$f\big(y_{i,1}\big) = t - \left(\frac{m}{3}(2r-1)\right)$

$f\big(y_{i,j}\big) = t - \left(\frac{m}{3}(r-j+4) - i - 1\right)$

$f\big(y_{i,r}\big) = t - (m-i)$

$f(z_i) = i, \qquad i = 1,2,3$

$f\big(z_3 x_{i,1}\big) = t - (m-2)$

$f\big(x_{i,j} x_{i,j+1}\big) = t - \left(\frac{m}{3}(r+j+1)\right)$

$f\big(z_1 x_{i,r}\big) = 1$

$f\big(z_1 y_{i,1}\big) = t - (m-i)$

$f\big(y_{i,j} y_{i,j+1}\big) = t - \left(\frac{m}{3}(r-j-1) + 1\right)$

$f\big(z_2 y_{i,r}\big) = t$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap titik pada $sp(m,r,2)$ berbeda untuk $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 2,3,\dots,r-1$. Perhatikan bahwa

1. $wt\big(x_{i,r}\big) = 2t - \frac{4mr}{3} + i$
   $< 2t - \frac{4mr}{3} + i + 1 = wt\big(x_{i+1,r}\big)$
2. $wt\big(x_{m,r}\big) = 2t - \frac{4mr}{3} + m$
   $< 3t - \frac{2mr}{3} + m = wt\big(x_{1,r-1}\big)$
3. $wt\big(x_{i,j}\big) = 3t - m(r+j) + i - 1$
   $< 3t - m(r+j) + i =$
   $wt\big(x_{i+1,j}\big)$
4. $wt\big(x_{m,j}\big) = 3t - m(r+j) + m - 1$

$< 3t - m(r+j) + m = wt(x_{1,j-1})$

5. $wt(x_{m,2}) = 3t - mr - m - 1$
$< 3t - mr - m = wt(x_{1,1})$
6. $wt(x_{m,1}) = 3t - mr - 1$
$< 3t - mr = wt(y_{1,1})$
$< 3t - mr + 1 = wt(y_{2,1})$
7. $wt(y_{i,j}) = 3t - m(r-j+1) + i - 1$
$< 3t - m(r-j+1) + i = wt(y_{i+1,j})$
8. $wt(y_{m,j}) = 3t - m(r-j+1) + m - 1$
$< 3t - m(r-j+1) + m = wt(y_{1,j+1})$
9. $wt(y_{m,r-1}) = 3t - m - 1$
$< 3t - m = wt(y_{1,r})$
10. $wt(y_{m,r}) = 3t - 1$
$< m(t-(m-2)) + 3$
$= wt(z_3)$
11. $wt(z_3) = m(t-(m-2)) + 3$
$< m + 1 + \sum_{i=1}^{m}(t-(m-i)) = wt(z_1)$
$< mt + 2 = wt(z_2)$

Berdasarkan definisi bobot titik tersebut, diperoleh $wt(x_{1,r}) < wt(x_{2,r}) < \cdots < wt(x_{m,r}) < wt(x_{1,r-1}) < wt(x_{1,r-1}) < \cdots < wt(x_{m,r-1}) < wt(x_{1,r-2}) < \cdots < wt(x_{1,1}) < wt(x_{2,1}) < \cdots < wt(x_{m,1}) < wt(y_{1,1}) < wt(y_{2,1}) < \cdots < wt(y_{m,1}) < wt(y_{1,2}) < wt(y_{2,2}) < \cdots < wt(y_{m,2}) < wt(y_{1,3}) < \cdots < wt(y_{1,r}) < wt(y_{2,r}) < \cdots < wt(y_{m,r}) < wt(z_3) < wt(z_1) < wt(z_2)$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bobot setiap titik pada $sp(m,r,2)$ berbeda. Maka f yang dikonstruksikan tersebut merupakan suatu pelabelan tidak teratur pada $sp(m,r,2)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah t sebagai berikut. Misalkan $t = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$
Untuk $i = 1,2,\ldots,m$

1. $f(x_{i,1}) \le f(x_{m,1})$
$= t - \left(\frac{m}{3}(2(3)-2) - m + 3\right) = t - \left(\frac{m}{3} + 3\right) < t$
2. Untuk $j = 2,3,\ldots,r-1$ maka
$f(x_{i,j}) \le f(x_{m,2})$
$= t - \left(\frac{m}{3}\big((3)+(2)-1\big) - m + 1\right) = t - \left(\frac{m}{3} + 1\right) < t$
3. $f(x_{i,r}) \le f(x_{m,3})$
$= t - \left(\frac{2(m)(3)}{3} - m + 1\right) = t - (m+1) < t$
4. $f(y_{i,1}) \le f(y_{m,1})$
$= t - \left(\frac{m}{3}(2(3)-1)\right) = t - \left(\frac{5m}{3}\right) < t$
5. Untuk $j = 2,3,\ldots,r-1$ maka
$f(y_{i,j}) \le f(y_{m,r-1})$
$= t - \left(\frac{m}{3}\big((r)-(r-1)+4\big) - m - 1\right) = t - \left(\frac{2m}{3}\right) < t$
6. $f(y_{i,r}) \le f(y_{m,r})$
$= t - \big((m) - m\big) = t$
7. Untuk $i = 1,2,3$ maka $f(z_i) \le f(z_3) = 3 < t$
8. $f(z_3 x_{i,1}) \le f(z_3 x_{m,1})$
$= t - (m-2) < t$
9. Untuk $j = 1,2,\ldots,r-1$ maka
$f(x_{i,j}x_{i,j+1}) \le f(x_{m,1}x_{m,2})$
$= t - \left(\frac{m}{3}\big((3)+(1)+1\big)\right) = t - \frac{5m}{3} < t$
10. $f(z_1 x_{i,3}) \le f(z_1 x_{m,3}) = 1 < t$
11. $f(z_1 y_{i,1}) \le f(z_1 y_{m,1})$
$= t - \big((m) - (m)\big) = t$
12. Untuk $j = 1,2,\ldots,r-1$ maka
$f(y_{i,j}y_{i,j+1}) \le f(y_{m,r-1}y_{m,r})$
$= t - \left(\frac{m}{3}\big((r)-(r-1)-1\big) + 1\right) = t - 1 < t$
13. $f(z_2 y_{i,r}) \le f(z_2 y_{m,r}) = t$

Dengan demikian f merupakan suatu pelabelan$-t$ total tidak teratur titik dengan $t = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$, untuk $m,n \ge 3$. Artinya $tvs(sp(m,r,2)) \le \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$. Karena $tvs(sp(m,r,2)) \ge \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$ dan $tvs(sp(m,r,2)) \le \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$, maka

$$tvs(sp(m,r,2)) = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil \qquad \blacksquare.$$

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan penelitian, diperoleh kesimpulan bahwa nilai ketidakteraturan pada *series perallel* untuk $m \ge 3$ dan $r \ge 3$ yaitu $tvs(sp(m,r,2)) = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$. Pembahasan mengenai pelabelan total tidak teratur titik masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini dan dapat juga melakukan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graf yang berbeda.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terima kasih pada semua tim peneliti yang telah memberi sumbangsih pengetahuan dan saran.

DAFTAR PUSTAKA

Anolcher M. & Palmer C.(2012). Irregular Labelings of Circulant Graphs. *Discrete Mathematics*. 312 : 3416-3466.

Ahmad A., Baca M., & Bashir Y. (2014). Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unisyclic Graphs. *Bull. Math. Sci. Math Roumanie*. 2 : 147-152.

Baca M., Jendrol., Miller M.,& Ryan J.(2007). On Irregular total Labelings. *Discrete Mathematics*. 307 : 1378-1388.

Chartrand G.*et al*.(1986). *Irregular networks*. Proc. of the 250th Anniversary Conf. on Graph Theory. Fort Wayne: Indiana.

Kotzig A.& Rosa A.(1970). Magic Valuations of Finite Graphs.*Canadian Mathematical Bulleting*. 13: 451–323.

Nurdin, Baskoro, E.T. , Salman, A.N.M. , dan Gaos, N.N. 2010. On The Total Vertex Irregularity Strength Of Trees. *Discrete Mathematics.* 310 : 3043-3048.

Rajasingh I., Rajan B., & Annama, V.(2012). On Total Vertex Irregularity Strength of Triangle Related Graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics*. 2 : 108-116.

Rajasingh I. &Arockiamary S. T.(2015). Total Edge Irregularity StrengthOf Series Parallel Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 99 : 11-21.

Wallis W. D.(2001). *Magic Graphs*. Birkhäuser Boston: New Work.