

Analisis Kemajuan Kemampuan Dasar dalam Pembelajaran Aljabar Linear Lanjut Bagi Mahasiswa Perguruan Tinggi

Nasrullah^{1*}, Khadijah², Ahyani Mirah Liani³

^{1) 2) 3)} Program Studi Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makassar

¹⁾ nasrullah@unm.ac.id

²⁾ khadijah0611@gmail.com

³⁾ ahyani.mirah.liani@unm.ac.id

ABSTRAK

Mempersiapkan mahasiswa agar memiliki kemampuan dasar suatu konsep menjadi tujuan pembelajaran di perguruan tinggi. Kemampuan dasar mahasiswa menjadi salah satu faktor yang mempengaruhi kemampuan lanjutannya. Oleh karena itu, kemajuan kemampuan dasar dianggap sebagai variabel penting dalam proses pembelajaran. Pentingnya kemampuan dasar ini, mengarahkan kita untuk mencari tahu apakah kegiatan perkuliahan yang diberikan kepada mahasiswa mengarahkan mereka untuk mengembangkan dengan baik kemampuan dasar tersebut? Di dalam penelitian ini, dianalisis kemampuan dasar suatu konsep khususnya konsep Aljabar Linear Lanjut, dan instruksi yang mendukung pembelajaran kemajuan kemampuan dasar Aljabar Linear Lanjut. Jenis penelitian ini menggunakan metode *mixed method* dengan subjek penelitian yaitu 3 orang mahasiswa semester 5 pada program studi pendidikan matematika. Analisis kuantitatif menggunakan N-Gain untuk mengukur kemajuan kemampuan dasar subjek, serta analisis kualitatif terhadap hasil tugas dan proyek pembelajaran. Berdasarkan hasil penelitian ditemukan bahwa terdapat kemajuan kemampuan dasar Aljabar Linear Lanjut, terdapat 67 % mahasiswa yang sudah mencapai Level 3, yaitu tingkat analisis mendalam. Mahasiswa mampu menganalisis bagaimana bentuk vektor yang memenuhi aksioma sehingga termasuk dalam ruang vektor umum, bagaimana subruang-subruang vektor, memahami mengapa dimensi memiliki sifat-sifat tertentu, dan bagaimana vektor yang bergantung linear dapat menjadi vektor yang bebas linear.

Kata Kunci: Aktivitas dan Instruksi Pembelajaran, Aljabar Linear Lanjut, Kemampuan Dasar, Kemampuan prosedural dan analisis.

ABSTRACT

Preparing students to have basic skills of a concept is the goal of learning in higher education. Students' basic skills are one of the factors that influence their advanced skills. Therefore, the progress of basic skills is considered an important variable in the learning process. The importance of these basic skills, leads us to find out whether the lecture activities given to students direct them to develop these basic skills well? In this study, the basic skills of a concept are analyzed, especially the concept of Advanced Linear Algebra, and instructions that support learning the progress of basic skills of Advanced Linear Algebra. The subjects of the study were 5th or 7th semester students in the Mathematics Education study program, Makassar State University. This study uses a mixed method, with quantitative analysis using N-Gain to measure the progress of student understanding, as well as qualitative analysis of the results of learning assignments and projects. Based on the results of the study, it was found that there was progress in basic

skills of Advanced Linear Algebra, there were 67% of students who had reached Level 3, which is the level of in-depth analysis. Students are able to analyze how vectors satisfy the axioms so that they are included in general vector spaces, how vector subspaces work, understand why dimensions have certain properties, and how linearly dependent vectors can become linearly independent vectors.

Keywords: Learning Activities and Instructions, Advanced Linear Algebra, Basic Skills, Procedural and Analytical Skills.

A. PENDAHULUAN

Tuntutan skill di abad 21 yang semakin pesat membutuhkan tantangan tersendiri, baik di lingkungan pendidikan maupun dunia kerja (Hardjo et al., 2019). Pembelajaran abad 21 memerlukan mahasiswa untuk menguasai berbagai keterampilan, termasuk kemampuan berpikir tingkat tinggi atau HOTS dalam matematika (Umar & Usman, 2021). Agar mahasiswa memiliki kemampuan berpikir tingkat tinggi atau HOTS maka perlu penguatan fondasi kemampuan dasarnya. Kemampuan dasar mahasiswa menjadi salah satu faktor yang mempengaruhi kemampuan lanjutannya. Kemampuan dasar dan penjelasan penyelesaian suatu masalah matematika menunjukkan gambaran ide dalam benak peserta didik. Cara penyampaian pendapat peserta didik, dan kolaborasinya ditunjukkan dengan kontribusinya ke komunitas belajar (Khadijah et al., 2022). Gambaran kemampuan dasar dan ide peserta didik dapat diamati dari hasil belajar dan partisipasinya selama pembelajaran.

Pemahaman yang mendalam terhadap konsep-konsep matematika merupakan salah satu aspek penting dalam kecakapan matematis yang harus dikuasai oleh mahasiswa. Kemampuan untuk memahami dan menerapkan

konsep-konsep matematika secara menyeluruh menjadi kunci keberhasilan dalam mempelajari matematika, termasuk pada mata kuliah aljabar linear lanjut. Penguasaan konseptual yang kuat membantu mahasiswa dalam menganalisis, memecahkan masalah, dan mengembangkan kemampuan dasar dalam pembelajaran aljabar linear lanjut. Namun, tidak semua mahasiswa memiliki kemampuan pemahaman konsep yang optimal, (S. S. Ahmad et al., 2015) terutama pada topik-topik yang abstrak seperti konsep ruang vektor umum dalam aljabar linear lanjut.

Aljabar Linear Lanjut merupakan salah satu mata kuliah inti yang wajib ditempuh di perguruan tinggi, dengan penerapan konsep yang sudah kompleks, ruang lingkup materi yang luas, penggunaan prosedur penyelesaian yang kompleks serta penerapan pada beberapa bidang ilmu yang lain, sehingga kemampuan berpikir tingkat tinggi (HOTS) sangat diperlukan. Mata kuliah ini membutuhkan pemahaman konsep yang kuat dari mahasiswa, karena banyak konsep-konsep abstrak yang harus dipelajari. Banyaknya konsep yang abstrak dalam pembelajaran matematika, terutama aljabar linear lanjut, seperti konsep ruang vektor umum, membuat mahasiswa seringkali menganggap mata kuliah ini sulit (D. Ahmad et

al., 2021). Mahasiswa sering mengalami kesulitan dalam memahami konsep-konsep dasar, terutama dalam proses pembuktian (Baist et al., 2020). Nurlaelah dan Carina menemukan bahwa mahasiswa mengalami kesalahan dalam memahami konsep ruang vektor (Baist et al., 2020). Selain itu, Sari juga menemukan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam proses pembuktian pada materi aljabar linear. Dan berdasarkan observasi, masih ada 68% mahasiswa yang kesulitan dalam memahami konsep-konsep abstrak dalam Aljabar Linear Lanjut. Oleh karena itu, perlu adanya analisis bagaimana kemampuan dasar mahasiswa selama pembelajaran Aljabar Linear Lanjut dan bagaimana kemajuan kemampuan dasarnya.

Kemampuan dasar merupakan kemampuan prasyarat yang harus dimiliki mahasiswa sebelum mempelajari suatu materi, karena kemampuan dasar tersebut akan menjadi fondasi bagi mahasiswa dalam memahami konsep-konsep yang lebih kompleks. Kemampuan dasar yang diperlukan dalam mempelajari aljabar linear lanjut di antaranya adalah pemahaman tentang konsep matriks, sistem persamaan linear, serta kemampuan untuk berpikir secara aljabar, yaitu kemampuan untuk memahami, memanipulasi, dan menggunakan simbol-simbol aljabar dalam menyelesaikan masalah matematika. (D. Ahmad et al., 2021; Kusuma & Mujiono, 2019; Umar & Usman, 2021). Oleh karena itu, mengidentifikasi dan mengembangkan kemampuan dasar mahasiswa, terutama kemampuan berpikir

aljabar, menjadi hal yang penting untuk menunjang keberhasilan mahasiswa dalam pembelajaran aljabar linear lanjut. (Kriswandani & Kusuma, 2022; Kusuma & Mujiono, 2019; Umar & Usman, 2021). Pada penelitian ini, kemampuan dasar yang dimaksud mencakup pemahaman konsep, kemampuan prosedural, dan kemampuan analitis dalam pembelajaran Aljabar Linear Lanjut.

Mahasiswa ada yang memiliki kemampuan prosedural tetapi mereka tidak komprehensif dalam menerapkan dan memahami prinsip-prinsip serta struktur teoritis yang mendasari prosedur yang mereka gunakan. Tidak semua mahasiswa dapat mengoptimalkan kemampuannya dalam memahami konsep-konsep aljabar linear lanjut. (Faulina & Andriyani, 2020). Oleh karena itu, penting untuk meneliti dan menganalisis kemampuan dasar mahasiswa dalam pembelajaran aljabar linear lanjut.

Penelitian-penelitian sebelumnya terkait pembelajaran aljabar linear lanjut seperti penelitian (Faulina & Andriyani, 2020; Yusrina, 2018) menunjukkan bahwa kemampuan berpikir aljabar dan pemahaman konseptual menjadi faktor yang penting dalam keberhasilan mahasiswa dalam mempelajari aljabar linear lanjut. Meskipun demikian, masih terbatas penelitian yang secara spesifik mengkaji kemampuan dasar mahasiswa dalam pembelajaran aljabar linear lanjut di perguruan tinggi. Penelitian-penelitian sebelumnya terkait kemampuan dasar mahasiswa dalam

pembelajaran aljabar linear lanjut masih terbatas, terutama yang dilakukan di dalam negeri, sehingga penelitian lebih lanjut diperlukan untuk mengeksplorasi kemampuan dasar mahasiswa dalam pembelajaran aljabar linear lanjut di Indonesia. Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kemajuan kemampuan dasar mahasiswa dalam pembelajaran aljabar linear lanjut di perguruan tinggi.

B. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian *mixed method*. Penelitian dilakukan selama 6 bulan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 dalam pembelajaran Aljabar Linear Lanjut. Subjek penelitian yaitu 3 orang mahasiswa program studi Pendidikan matematika semester 5 Universitas Negeri Makassar.

Mahasiswa diberikan aktivitas dalam setiap pertemuan perkuliahan yang diselingi oleh studi kasus. Setiap aktivitas mahasiswa dikumpulkan dan direkam yang menjadi data subjek serta didokumentasikan dengan baik secara digital. Untuk pengumpulan data kualitatif, berupa video penjelasan materi yang dibuat mahasiswa sebagai tugas proyek dalam mata kuliah Aljabar Linear Lanjut. Dokumentasi dan video pembelajaran menjadi data utama dalam penelitian ini.

Analisis data dalam penelitian ini secara kuantitatif dan kualitatif. Analisis data kuantitatif dilakukan dengan analisis N-gain dari pertemuan ke pertemuan. N-Gain digunakan untuk mengukur perubahan relatif antara tingkat

pemahaman peserta didik sebelum dan setelah pembelajaran (Imaculata et al., 2021; Santoso & Suyono, 2021). Uji N-Gain dalam penelitian ini bertujuan untuk mengetahui seberapa besar kemajuan kemampuan dasar mahasiswa.

Pada penelitian ini, dilakukan pula analisis kualitatif. Analisis kualitatif memberikan gambaran umum tentang struktur aplikasi pembelajaran (Priss, 2020). Dalam penelitian ini, kemajuan kemampuan dasar dalam pembelajaran aljabar linear lanjut mencakup empat area utama kompetensi, yaitu:

- Pemahaman Konsep Dasar Ruang Vektor Umum
- Dimensi dan Basis
- Nilai Eigen dan Vektor Eigen
- Transformasi Linear

Dalam artikel ini, terbatas pada pemahaman konsep dasar khususnya pada Ruang Vektor Umum. Pemahaman Konsep Dasar yang dimaksud, mencakup:

- Level 1: Di tingkat ini, mahasiswa diharapkan bisa memahami definisi-definisi fundamental. Misalnya, ketika berbicara tentang ruang vektor, mahasiswa harus bisa menjelaskan bahwa itu adalah himpunan dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Mahasiswa juga harus bisa mengidentifikasi contoh-contoh sederhana seperti $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, atau ruang polinomial.
- Level 2: Pada tingkat ini, tidak cukup hanya mengenal definisi, tapi harus bisa membuktikan. Contohnya, jika diberikan

himpunan vektor, mahasiswa harus bisa memverifikasi apakah memenuhi semua aksioma ruang vektor. Mereka juga harus bisa menentukan dimensi dengan mencari basis.

- Level 3: Ini adalah tingkat analisis mendalam. Mahasiswa harus bisa menganalisis bagaimana subruang-subruang berinteraksi, memahami mengapa dimensi memiliki sifat-sifat tertentu, dan bagaimana perubahan basis mempengaruhi koordinat vektor.

Dalam penelitian ini, kemajuan kemampuan dasar dalam pembelajaran aljabar linear lanjut dianalisis secara kualitatif sesuai dengan level kemampuan dasar, penyelesaian prosedural mahasiswa dan bagaimana Tingkat penyelesaiannya secara komprehensif.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian Analisis Kemajuan Kemampuan Dasar dalam Pembelajaran Aljabar Linear Lanjut di Tingkat Perguruan Tinggi ini dilaksanakan pada semester berjalan dalam mata kuliah Aljabar Linear Lanjut tahun ajaran 2023/2024. Untuk data kualitatif, subjek penelitian terdiri dari 3 orang mahasiswa yang menunjukkan kemajuan kemampuan dasar, untuk melihat sampai dimana tingkat kemajuannya.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kemajuan kemampuan dasar mahasiswa dalam pembelajaran aljabar linear lanjut di perguruan tinggi, dengan *mixed method*. Terdapat 3 orang mahasiswa sebagai subjek penelitian. Analisis kuantitatif menemukan kemajuan kemampuan dasar ketiga subjek mahasiswa dari pertemuan

ke pertemuan selama 4 kali kuis. Dan analisis kualitatif mendeskripsikan kedalaman kemampuan dasar dan tingkat analisis pada ketiga subjek penelitian.

Berdasarkan hasil Penelitian yang telah dilakukan, diperoleh data dan pembahasan berikut ini.

Subjek 1

Pada konsep ruang vektor, subruang, bebas linear, bergantung linear, koordinat dan basis serta dimensi dan perubahan basis dalam Vektor di Ruang berdimensi 5 (R^5), Polinomial P3, dan matriks $M_{3 \times 3}$. Pada hasil pekerjaan Subjek 1 dalam Gambar 1, terlihat mahasiswa mampu menemukan bentuk vektor khusus yang memenuhi untuk membentuk subruang.

Pembahasan :

Misalkan $W = \{(-c, 0, c, 0, -a)\}$

Ambil $u = (-c_1, 0, c_1, 0, -a_1) \in W$ dan $v = (-c_2, 0, c_2, 0, -a_2) \in W$ dan k skalar sebarang

- i. Akan ditunjukkan bahwa $u + v \in W$

$$\begin{aligned} u + v &= (-c_1, 0, c_1, 0, -a_1) + (-c_2, 0, c_2, 0, -a_2) \\ &= ((-c_1) + (-c_2), 0 + 0, (c_1 + c_2), 0 + 0, (-a_1) + (-a_2)) \\ &= ((-c_1) + (-c_2), 0, (c_1 + c_2), 0, (-a_1) + (-a_2)) \in W \end{aligned}$$
Diperoleh $u + v \in W$

∴ Terpenuhi.

- ii. Akan ditunjukkan bahwa Jika k skalar dan u adalah vektor di W , maka $ku \in W$

$$\begin{aligned} ku &= k(-c_1, 0, c_1, 0, -a_1) \\ &= (-kc_1, k \cdot 0, k c_1, k \cdot 0, -k a_1) \\ &= (-kc_1, 0, k c_1, 0, -k a_1) \in W \end{aligned}$$
Diperoleh $ku \in W$

∴ Terpenuhi.

∴ Karena Kedua aksioma terpenuhi maka vektor $(a, 0, 0, b)$ membentuk subruang di R^5

Gambar 1. Hasil Tugas Subjek 1

Gambar 2 menunjukkan bahwa Subjek 1 menggunakan salah satu contoh vektor bebas linear untuk menemukan basis. Hal ini menunjukkan bahwa subjek mampu mengategorikan contoh dan bukan contoh suatu vektor bebas linear dan menemukan basis dari vektor tersebut.

$$= ka(x) \in V \text{ (Terpenuhi)}$$

3. Bebas linear

Tentukan persamaan polynomial berikut apakah bebas linear atau bergantung linear

$$p_1 = 2x^3 + x^2 - x + 4; u_1 = (2,1,-1,4)$$

$$p_2 = 3x^3 + x^2 + 2; u_2 = (3,1,0,2)$$

$$p_3 = -2x^3 + 1; u_3 = (-2,0,0,1)$$

$$p_4 = -x^3 + 4x^2 + 2x + 1; u_4 = (-1,4,2,1)$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 = 0$$

$$k_1(2,1,-1,4) + k_2(3,1,0,2) + k_3(-2,0,0,1) + k_4(-1,4,2,1) = 0$$

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 - 2k_3 - k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + 4k_4 = 0 \\ -k_1 + 2k_4 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 4k_4 = 0 \\ -k_1 + 2k_4 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

$$4k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4 = 0$$

Berdasarkan persamaan linear, dapat diubah ke bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan Operasi Baris Elementer diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yang berarti: $c_1 = b_1, c_2 = b_2, c_3 = b_3, c_4 = b_4, c_5 = b_5$

∴ Ini membuktikan bahwa S spans V

(b) S bebas linear

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dimana

$v_1 = (2,0,1,4,2), v_2 = (1,1,0,2,1), v_3 = (0,4,3,1,0), v_4 = (3,2,1,3,1), v_5 = (2,1,2,0,1)$ di R^5 .

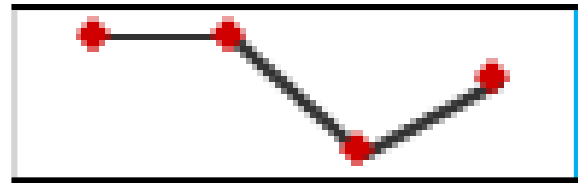
∴ Jadi, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dimana $v_1 = (1,3,2,4), v_2 = (3,1,4,2), v_3 = (2,1,2,1)$ dan $v_4 = (-1,2,3,1)$ merupakan basis untuk V di R^4 .

Gambar 2. Hasil Jawaban Subjek 1

Cara penyelesaian Subjek 1 untuk bentuk polynomial dilakukan dengan cara mengubah ke himpunan titik-titik vektor sebelum mengubah ke bentuk matriks. Cara ini mampu membantu subjek agar tidak keliru dalam perubahan bentuk polinomial ke matriks.

Grafik kemajuan kemampuan dasar Subjek 1 setelah diberikan kuis sebanyak 4 kali dengan

peningkatan aktivitas dan tingkat analisis, diperoleh hasil yang terlihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Kemajuan Kemampuan Dasar Subjek 1

Subjek 2

Pada Subjek 2, subjek menjabarkan konsep ruang vektor, subruang, bebas linear, bergantung linear, koordinat dan basis serta dimensi dan perubahan basis dalam Vektor di R^4 , Polinomial P_3 , dan matriks $M_{3 \times 3}$. Hal menarik ditemukan pada Gambar 4, terlihat bahwa subjek 2 mengetahui bagian/anggota dari vektor yang dapat diubah atau dimodifikasi sehingga vektor yang bergantung linear dapat menjadi vektor yang bebas linear.

Karena $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$ maka $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dan $\vec{v}_4$ bergantung linear

Jika ingin membuat $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dan $\vec{v}_4$ menjadi bebas linear, langkah yang harus dilakukan yaitu mengubah $\vec{v}_4$. Dari $\vec{v}_4 = \{1, -1, 3, 4\}$ menjadi $\vec{v}_4 = \{1, 1, 3, 4\}$.

Sehingga akan dibuktikan bahwa $\vec{v}_1 = \{-4, 4, 2, 1\}, \vec{v}_2 = \{3, -3, 1, 2\}, \vec{v}_3 = \{-2, 2, 4, 2\}$ dan $\vec{v}_4 = \{1, 1, 3, 4\}$ bebas linear di R^4 .

Berdasarkan **Theorem 4.3.1**, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dan $\vec{v}_4$ yang berada pada Ruang Vektor V dikatakan bebas linear jika dan hanya jika koefisien yang memenuhi persamaan berikut adalah $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 + k_4 \vec{v}_4 = 0$$

$$k_1(-4, 4, 2, 1) + k_2(3, -3, 1, 2) + k_3(-2, 2, 4, 2) + k_4(1, 1, 3, 4) = (0, 0, 0, 0)$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan berikut:

$$-4k_1 + 3k_2 - 2k_3 + k_4 = 0$$

$$4k_1 - 3k_2 + 2k_3 + k_4 = 0$$

$$2k_1 + k_2 + 4k_3 + 3k_4 = 0$$

$$k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 4k_4 = 0$$

Untuk mencari nilai k_1, k_2, k_3 , dan k_4 , nyatakan sistem persamaan diatas dalam bentuk matriks terlebih dahulu kemudian lakukan Operasi Baris

Gambar 4. Hasil Tugas Subjek 2

Penyesuaian penyelesaian yang dipaparkan pada Gambar 4 mencoba diselesaikan kembali oleh Subjek 2, yang dilengkapi dengan

penjelasan rinci. Selanjutnya, Gambar 5 menunjukkan bahwa mahasiswa memiliki penulisan khusus saat mengonversi polinomial ke kombinasi linear.

3) Bebas Linear

Diketahui $V = \{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\}$ dengan operasi standar penjumlahan dan perkalian merupakan Ruang Vektor di P_3 .

Misalkan $p_1 = 1 + 4x + 2x^2 + 4x^3$, $p_2 = 4 + 3x + x^2 + 3x^3$, $p_3 = -3 + 2x + x^2 + 2x^3$, dan $p_4 = 4 + x + x^2 + x^3$.

Berdasarkan Teorema 4.3.1 p_1, p_2, p_3 , dan p_4 yang berada pada ruang vektor V dikatakan bebas linear jika dan hanya jika koefisien yang memenuhi persamaan berikut adalah $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

$$k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 + k_4p_4 = 0$$

$$k_1(1 + 4x + 2x^2 + 4x^3) + k_2(4 + 3x + x^2 + 3x^3) + k_3(-3 + 2x + x^2 + 2x^3) + k_4(4 + x + x^2 + x^3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(k_1 + 4k_2 - 3k_3 + 4k_4) + (4k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4)x + (2k_1 + k_2 + k_3 + k_4)x^2 + (4k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4)x^3 = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yang berarti bahwa :

$$k_1 + 2k_4 = 0$$

$$k_2 - k_4 = 0$$

$$k_3 - 2k_4 = 0$$

Misalkan $k_4 = t$ maka $k_1 = (-2t)$, $k_2 = t$, dan $k_3 = 2t$

Karena $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$, maka p_1, p_2, p_3 , dan p_4 bergantung linear

p_1, p_2, p_3 , dan p_4 dapat diubah menjadi bebas linear dengan mengubah p_4 . Dimana mulanya $p_4 = 4 + x + x^2 + x^3$ diubah menjadi $p_4 = 4 - x + x^2 + x^3$.

Maka akan dibuktikan bahwa $p_1 = 1 + 4x + 2x^2 + 4x^3$, $p_2 = 4 + 3x + x^2 + 3x^3$, $p_3 = -3 + 2x + x^2 + 2x^3$, dan $p_4 = 4 - x + x^2 + x^3$ bebas linear di P_3 .

Gambar 5. Hasil Jawaban Subjek 2

Subjek 2 mengetahui bagian/anggota dari vektor yang dapat diubah sehingga vektor polinomial yang bergantung linear dapat menjadi polinomial yang bebas linear. Begitu pula dengan bentuk matriksnya, yang dijabarkan pada Gambar 6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yang berarti bahwa:

$$k_1 - \frac{1}{2}k_3 = 0$$

$$k_2 + \frac{7}{4}k_3 = 0$$

Misalkan $k_3 = t$ maka $k_1 = \frac{1}{2}t$ dan $k_2 = -\frac{7}{4}t$

Karena $k_1, k_2, k_3 \neq 0$ maka A, B dan C bergantung linear $M_{3 \times 3}$.

A, B dan C dapat diubah menjadi bebas linear dengan mengubah C .

Dimana mulanya $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ diubah menjadi $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Maka akan dibuktikan bahwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, dan $C =$

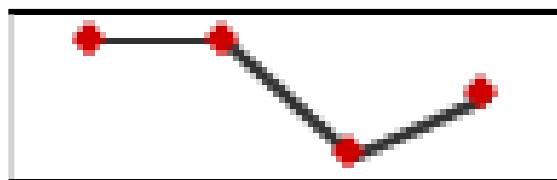
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ bebas linear di $M_{3 \times 3}$.

Berdasarkan Teorema 4.3.1 A, B dan C yang berada pada ruang vektor V dikatakan bebas linear jika dan hanya jika koefisien yang memenuhi persamaan berikut adalah $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Gambar 6. Hasil Tugas Subjek 2

Berdasarkan analisis Gambar 4, Gambar 5 dan Gambar 6, dapat terlihat bahwa Subjek 2 mampu mengetahui bagian/anggota dari vektor yang dapat diubah atau dimodifikasi sehingga vektor yang bergantung linear dapat menjadi vektor yang bebas linear, apa pun bentuknya, apakah Vektor di Ruang berdimensi n (R_n), Polinomial, maupun matriks.

Grafik kemajuan kemampuan dasar Aljabar Linear Lanjut pada Subjek 2 setelah menyelesaikan kuis 4 kali dengan peningkatan aktivitas dan tingkat analisis, diperoleh hasil yang terlihat pada Gambar 7.



Gambar 7. Kemajuan Kemampuan Dasar Subjek 2

Grafik kemajuan kemampuan dasar Subjek 2 hampir sama dengan grafik kemajuan Subjek 1. Hanya saja nilai hasil kuisnya berbeda. Subjek 2

mampu memperoleh nilai kuis yang lebih tinggi 2 poin dibandingkan Subjek 1.

Subjek 3

Subjek 3 mampu menjabarkan konsep ruang vektor, subruang, bebas linear, bergantung linear, koordinat dan basis serta dimensi dan perubahan basis dalam Vektor di Ruang berdimensi 4 (R^4), Polinomial P_3 , dan matriks $M_{3 \times 3}$. Gambar 8, terlihat Subjek 3 mengetahui bagian/anggota dari vektor yang dapat diubah sehingga vektor yang bergantung linear dapat menjadi vektor yang bebas linear.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yang berarti:

$$k_1 + \frac{5}{6}k_4 = 0$$

$$k_2 - \frac{5}{6}k_4 = 0$$

$$k_3 + \frac{7}{3}k_4 = 0$$

$$\text{Misalkan } k_4 = t, \text{ maka } k_1 = \left(-\frac{5}{6}t\right), k_2 = \left(\frac{5}{6}t\right), \text{ dan } k_3 = \left(-\frac{7}{3}t\right)$$

∴ Karena $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$, maka v_1, v_2, v_3 dan v_4 bergantung linear di R^4 .

Jika ingin membuat v_1, v_2, v_3 dan v_4 menjadi bebas linear, maka sebaiknya yang di ubah adalah v_4 . Dari $v_4 = (3,4,3,4)$ menjadi $v_4 = (-1,2,3,1)$.

Sehingga akan dibuktikan bahwa $v_1 = (1,3,2,4), v_2 = (3,1,4,2), v_3 = (2,1,2,1)$ dan $v_4 = (-1,2,3,1)$ bebas linear di R^4

Menurut **Theorem 4.3.1**, v_1, v_2, v_3 dan v_4 yang berada pada Ruang Vektor V dikatakan bebas linear jika dan hanya jika koefisien yang memenuhi persamaan berikut adalah $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

$$4c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 = b_4$$

Untuk mencari nilai c_1, c_2, c_3 , dan c_4 , nyatakan terlebih dahulu sistem persamaan diatas dalam bentuk matriks lalu lakukan Operasi Baris Elementer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Operasi Baris Elementer diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Yang berarti: $c_1 = b_1, c_2 = b_2, c_3 = b_3, c_4 = b_4$

∴ Ini membuktikan bahwa S spans V

(b) S bebas linear

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dimana $v_1 = (1,3,2,4), v_2 = (3,1,4,2), v_3 = (2,1,2,1)$ dan $v_4 = (-1,2,3,1)$ bebas linear di R^4 .

∴ Jadi, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dimana $v_1 = (1,3,2,4), v_2 = (3,1,4,2), v_3 = (2,1,2,1)$ dan $v_4 = (-1,2,3,1)$ merupakan basis untuk V di R^4 .

Gambar 8. Hasil Tugas Subjek 3

Subjek 3 menggunakan contoh pada materi bebas linear sehingga pembaca dapat menghubungkan bebas linear dan basis. Hal ini memudahkan pemahaman materi dan terlihat hubungan antar penjelasan yang disampaikan Subjek 3. Pada Gambar 9, Subjek 3 mengetahui polynomial mana yang dapat diubah sehingga polynomial dalam ruang vektor yang bergantung linear dapat menjadi ruang vektor yang bebas linear.

persamaan diatas dalam bentuk matriks lalu lakukan Operasi Baris Elementer.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Operasi Baris Elementer diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yang berarti:

$$k_1 + k_4 = 0$$

$$k_2 + k_4 = 0$$

$$k_3 + k_4 = 0$$

$$\text{Misalkan } k_4 = t, \text{ maka } k_1 = (-t), k_2 = (-t), \text{ dan } k_3 = (-t)$$

∴ Karena $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$, maka p_1, p_2, p_3 , dan p_4 bergantung linear di P_3 .

Jika ingin membuat p_1, p_2, p_3 , dan p_4 menjadi bebas linear, sebaiknya yang diubah adalah p_4 . Dari $p_4 = 3 + 4x + 4x^2 + 3x^3$ menjadi $p_4 = (-1) + 2x + 3x^2 + x^3$.

Sehingga akan dibuktikan bahwa $p_1 = 1 + 3x + 2x^2 + 4x^3, p_2 = -1 + 2x - 2x^2 + x^3, p_3 = 3 - x + 4x^2 - 2x^3$ dan $p_4 = (-1) + 2x + 3x^2 + x^3$ bebas linear di P_3 .

Menurut **Theorem 4.3.1**, p_1, p_2, p_3 , dan p_4 yang berada pada Ruang Vektor V dikatakan bebas linear jika dan hanya jika koefisien yang memenuhi persamaan berikut adalah $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

$$k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 + k_4p_4 = 0$$

$$k_1(1 + 3x + 2x^2 + 4x^3) + k_2(-1 + 2x - 2x^2 + x^3) + k_3(3 - x + 4x^2 - 2x^3) + k_4(-1 + 2x + 3x^2 + x^3) = (0,0,0,0)$$

∴ Karena $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$, maka M_1, M_2 , dan M_3 bergantung linear di $M_{3 \times 3}$.

Jika ingin membuat M_1, M_2 , dan M_3 menjadi bebas linear, maka sebaiknya

kita mengubah M_1, M_2 , dan M_3 . Dari $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_2 =$

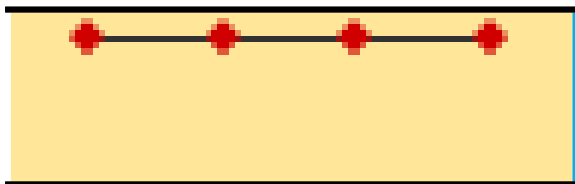
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dan } M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ menjadi } M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, M_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Gambar 9. Hasil Tugas Subjek 3

Subjek 3 mengetahui matriks mana yang dapat diubah sehingga matriks dalam ruang vektor yang bergantung linear dapat menjadi ruang vektor yang bebas linear. Hal ini menunjukkan bahwa Subjek 3 mampu mengetahui bagian/anggota dari vektor yang dapat diubah atau dimodifikasi sehingga vektor yang bergantung linear dapat menjadi vektor yang bebas linear, apa pun bentuknya, apakah Vektor di Ruang berdimensi n (R_n), Polinomial, maupun matriks.

Grafik kemajuan kemampuan dasar Aljabar Linear Lanjut pada Subjek 3 setelah menyelesaikan 4 kali kuis, diperoleh hasil yang terlihat pada Gambar 10.



Gambar 10. Kemajuan Kemampuan Dasar Subjek 3

Terlihat bahwa grafik kemajuan kemampuan dasar Subjek 3 bersifat tetap untuk seluruh kuis dan selalu mendapatkan nilai maksimal. Pemahaman konsep, kemampuan prosedural dan kemampuan analisis Subjek 3 memang terlihat dari pemaparan penyelesaian soal yang disampaikan. Subjek 3 mampu menyusun secara terstruktur dan sederhana tiap langkah jawaban namun bersifat detail, lengkap dan jelas.

Analisis Kemajuan Pemahaman Konsep Dasar Aljabar Linear Lanjut

Hasil perhitungan N-gain didapatkan skor 0,70. Ini menunjukkan bahwa peningkatan aktivitas-aktivitas yang diberikan kepada

mahasiswa selama pembelajaran memiliki kriteria sedang. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketiga subjek mencapai level menengah (Level 2) dalam pemahaman ruang vektor. Artinya, mereka tidak hanya mengenal definisi, tapi bisa membuktikan. Pada pembuktian ruang vektor, mahasiswa bisa memverifikasi apakah memenuhi kesepuluh aksioma ruang vektor dan jika ada yang belum memenuhi, aksioma yang mana saja yang belum memenuhi tersebut. Hal yang perlu mendapat perhatian agar kemajuan kemampuan mahasiswa dapat optimal diantaranya berupa penguatan materi prasyarat seperti logika matematika (Djamilah et al., 2023), Penggunaan software visualisasi untuk konsep geometris seperti Geogebra, dan pemberian contoh konkret sebelum abstraksi formal

Analisis ketiga subjek menunjukkan bahwa perkembangan bertahap, yaitu 2 dari 3 subjek (67%) menguasai konsep dasar kombinasi linear, keseluruhan subjek (100%) mampu mengonstruksi basis dengan benar, dan dapat menunjukkan basis dan teorema terkait dimensi. Dua dari 3 subjek (67 %) mencapai Level 3 yaitu tingkat analisis mendalam, yang ditunjukkan dengan kemampuan subjek mengetahui bagian/anggota dari vektor yang dapat diubah atau dimodifikasi sehingga vektor yang bergantung linear dapat menjadi vektor yang bebas linear, apa pun bentuknya, apakah Vektor di Ruang berdimensi n (R_n), Polinomial, maupun matriks.

Pola kemajuan pembelajaran menunjukkan kemajuan signifikan pada konsep dasar, tantangan pada aplikasi kompleks, dan kebutuhan penguatan pembelajaran bertahap.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa terdapat kemajuan kemampuan dasar Aljabar Linear Lanjut, terdapat 67 % mahasiswa yang sudah mencapai Level 3, yaitu tingkat analisis mendalam. Mahasiswa mampu menganalisis bagaimana bentuk vektor yang memenuhi aksioma sehingga termasuk dalam ruang vektor umum, bagaimana subruang-subruang vektor, memahami mengapa dimensi memiliki sifat-sifat tertentu, dan bagaimana vektor yang bergantung linear dapat menjadi vektor yang bebas linear.

Saran

Pemberian kesempatan dan aktivitas-aktivitas yang lebih bermakna kepada mahasiswa untuk mengeksplorasi lebih jauh kemampuannya bahkan sebaiknya dengan masalah yang lebih kompleks dan penyelesaian soal-soal olimpiade. Diharapkan agar pembelajaran tetap selalu berfokus pada kemampuan dasar, dengan aktivitas yang lebih berkembang.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, D., Tasman, F., Rifandi, R., Al Aziz, S., & Winanda, R. S. (2021). Modul Berbasis Logika Pembuktian untuk Mengurangi

Level Abstraksi Topik Grup dan Sifat-Sifatnya. *Jurnal Eksakta Pendidikan (Jep)*, 5(1), 33–40. <https://doi.org/10.24036/jep/vol5-iss1/573>

Ahmad, S. S., Shaari, M. F., Hashim, R., & Kariminia, S. (2015). Conducive Attributes of Physical Learning Environment at Preschool Level for Slow Learners. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 201(February), 110–120. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.08.138>

Baist, A., Amarullah, A., Safitri, P. T., & Enawar. (2020). The Use of Computational Mathematics Teaching Materials aided Mathematica Software in Vektor Algebra Course. *Journal of Physics: Conference Series*, 1477(2). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1477/2/022013>

Djamilah, S., Hidayati, R., & Ikrima. (2023). Analisis Kesulitan Belajar Siswa Dalam Mata Pelajaran Matematika Pada Materi Statistika. *EMTEKA: Jurnal Pendidikan Matematika*, 4(1), 36–44.

Faulina, M., & Andriyani, A. (2020). Pembelajaran Guided Discovery Untuk Meningkatkan Pemahaman Sudut Pada Siswa Tunanetra. *Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(2), 156–168.

Hardjo, F. N., Permanasari, A., & Permana, I. (2019). Meningkatkan Literasi Sains Siswa Kelas 7 Melalui Pembelajaran Inkuiri Menggunakan Bahan Ajar Berbasis Proyek Pada Materi Energi. *Journal of Science Education and Practice*, 2(2), 1–9. <https://doi.org/10.33751/jsep.v2i2.1393>

Imaculata, M., Syam, M., & Haryanto, Z. (2021). Penerapan Model Pembelajaran Inkuiri Terbimbing pada Materi Impuls dan Momentum di SMA Negeri 11 Samarinda. *Jurnal Literasi Pendidikan Fisika (JLPPF)*,

- 2(1), 63–72.
<https://doi.org/10.30872/jlpf.v2i1.355>
- Khadijah, K., HR, I. S., & Sutamrin, S. (2022). Partisipasi Online dalam Pembelajaran Berbasis Learning Management System (LMS) pada Matakuliah Pengantar Teori Fuzzi. In *EQUALS: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika* (Vol. 5, Issue 1, pp. 34–45).
<https://doi.org/10.46918/equals.v5i1.1237>
- Kriswandani, K., & Kusuma, D. (2022). Proses Berpikir Refraktif Mahasiswa Bergaya Kognitif Intuitive Dalam Menyelesaikan Masalah Kompleks. *Jurnal Karya Pendidikan Matematika*, 9(2), 61.
<https://doi.org/10.26714/jkpm.9.2.2022.61-75>
- Kusuma, A. C., & Mujiono, D. S. (2019). Pengembangan Perangkat Pembelajaran Problem Based Learning dengan Pendekatan Saintifik untuk Melatihkan Keterampilan Berpikir Kritis Mahasiswa. *JRPM (Jurnal Review Pembelajaran Matematika)*, 4(2), 102–114.
<https://doi.org/10.15642/jrpm.2019.4.2.102-114>
- Priss, U. (2020). A preliminary semiotic-conceptual analysis of a learning management system. *Procedia Computer Science*, 176, 3702–3709.
<https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.09.017>
- Santoso, E. A., & Suyono, S. (2021). Development of Structured Assignment Sheet in Reaction Rates Material To Train Science Process Skills. *Chemistry Education Practice*, 4(2), 135–141.
<https://doi.org/10.29303/cep.v4i2.2312>
- Umar, W., & Usman, H. (2021). Pengembangan Pembelajaran Abad 21 Berbasis Hots Matematis Melalui Strategi Mathematical Habits Of Mind. *Jurnal Sains, Sosial Dan Humaniora (Jssh)*, 1(2), 37–44.
<https://doi.org/10.52046/jssh.v1i2.937>
- Yusrina, S. L. (2018). PROFIL BERPIKIR ALJABAR SISWA SMP DALAM MEMECAHKAN MASALAH. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 7(3), 21–29.
<https://jurnalmahasiswa.unesa.ac.id/index.php/mathedunesa/article/view/25554/23429>