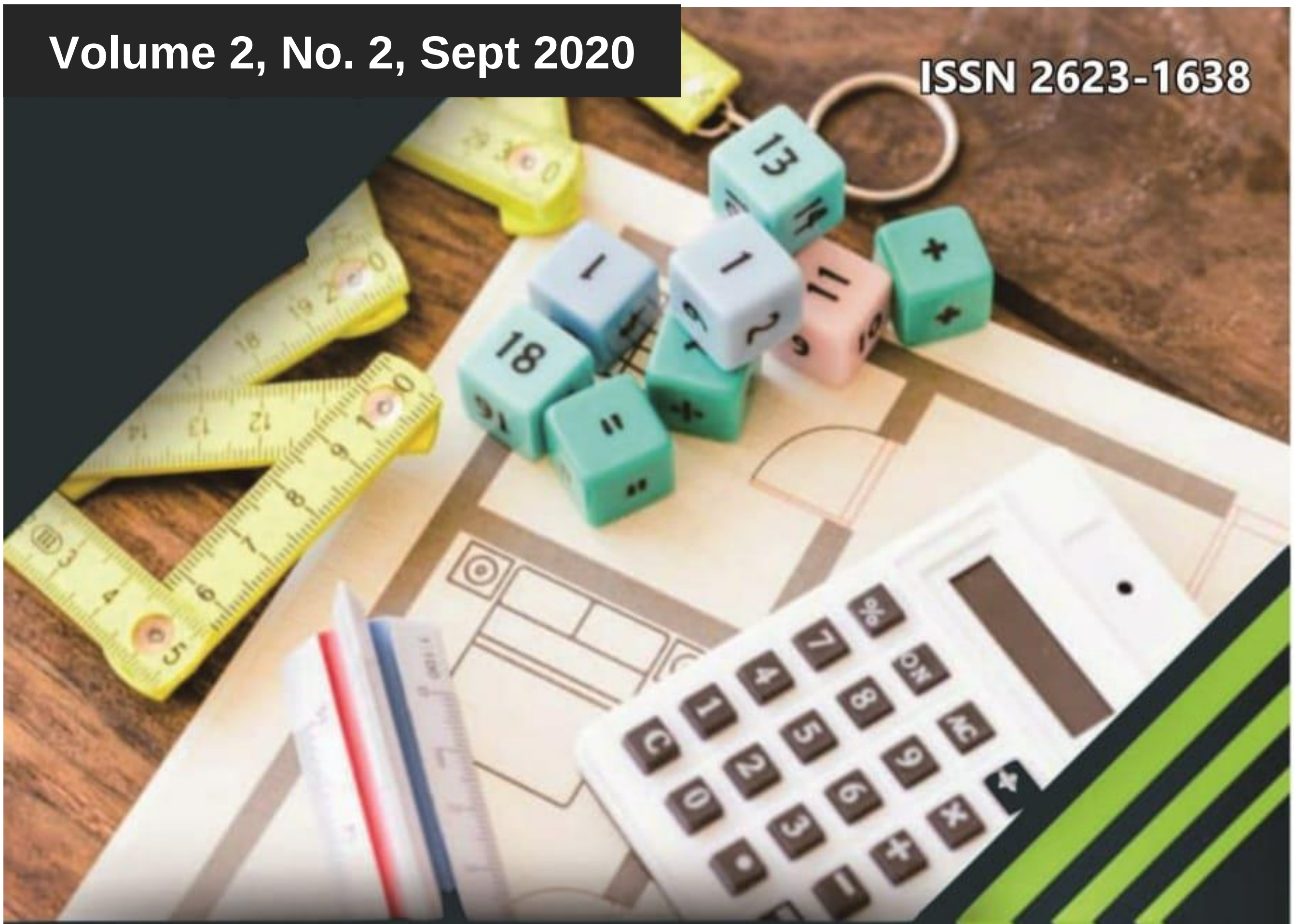
Volume 2, No. 2, Sept 2020

ISSN 2623-1638



JURNAL AXIOMATH

JURNAL MATEMATIKA DAN APLIKASINYA

Penerbit:
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Muslim Maros
email: axiomath@umma.ac.id

PEWARNAAN TITIK PADA KORONA GRAF KIPAS DENGAN GRAF KIPAS DAN GRAF BUKU SEGITIGA DENGAN GRAF BUKU SEGITIGA BERORDER SAMA

Landerius Maro[1)], Cornelis Banabera[2)]

[1)2)]*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,*
Universitas Tribuana Kalabahi
Jl. Soekarno Tang-Eng Batunirwala Telp. (0386) 2222882

[1)]landeriusmaro@gmail.com
[2)]nelriabbr@gmail.com

Abstrak— **Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang objek-objek diskrit. Salah satu konsep yang dipelajari dalam teori graf adalah pewarnaan titik yang bertujuan mencari bilangan kromatik. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji graf hasil operasi korona dua jenis graf yakni graf kipas dengan graf kipas dan graf buku segitiga dengan graf buku segitga. Hasil yang ditemukan dalam penelitian ini berupa jumlah titik dan jumlah sisi serta teorema bilangan kromatik pada graf hasil operasi korona graf kipas dengan graf kipas dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga.**

Kata Kunci— **bilangan kromatik, graf kipas, graf buku segitiga, operasi korona graf**

I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu Matematika yang telah tua usianya. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau titik *(verteks)* sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau sisi *(edge).* Teori graf merupakan topik yang banyak mendapat perhatian saat ini karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas.

Salah satu konsep yang dipelajari dalam graf yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*). Pewarnaan titik pada suatu graf G adalah pemberian warna berbeda pada setiap titik yang bertetangga di G, sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Secara umum pewarnaan titik dari graf G = (V,E) dengan k warna adalah suatu pemetaan $c: V(G) \rightarrow \{1.2 \dots k\}$ sedemikian sehingga $c\,(x_1) \neq c(x_2)$ untuk setiap (x_1) dan (x_2) yang bertetangga di G. Sementara itu, banyaknya warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik disebut bilangan kromatik (χ(G)). Konsep pewarnaan graf muncul sebagai model dalam memecahkan permasalahan pewarnaan peta.

Teknik pewarnaan sering digunakan untuk mewarnai operasi graf-graf khusus berorde sama dan tidak berorde sama. Auli Mardhaningsih dalam penelitiannya telah menemukan bilangan kromatik lokasi untuk graf lengkap $K_n \odot K_m$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ dengan teorema barunya yaitu $m+1$ $jika\, m = 1,$ $m+2$ $jika$ $2 \leq n \leq m+1, dan$ n $jika\, n > m+1.$ Selanjutnya penelitian lainnya juga telah dilakukan oleh Safira Izza Ghafrina dkk, dalam artikel mereka yang berjudul "Pewarnaan Titik Total Anti Ajaib Lokal Pada Graf Operasi Korona Dan Keterampilan Berfikir Tingkat Tinggi" menemukan bilangan kromatik total anti ajaib pada korona graf *cycle* dengan graf lengkap $C_n \odot \overline{K_m}$ adalah sebagai berikut. $\chi_{la} = 3$ jika *n* genap *m* ganjil, dan $\chi_{la} =$ 4 jika *n* ganjil *m* genap. Penelitian-penelitian lain juga telah dilakukan pada beberapa graf khusus lainnya namun belum ada penelitian yang mengkaji tentang pewarnaan titik pada korona graf kipas dengan graf kipas dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga.

Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf kipas dan graf buku segitiga. Graf kipas adalah graf yang dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 2$ yaitu graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n pada suatu titik yang disebut titik pusat graf. Sedangkan Graf buku segitiga merupakan graf yang dinotasikan dengan Bt_n yaitu graf yang terdiri dari sejumlah n buah segitiga $(n \geq 2)$ dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki dua titik yang dipakai bersama. Sementara itu operasi yang digunakan adalah operasi korona graf yang di definisikan sebagai operasi dari dua graf G_1 (V_1, E_1) dan G_2 (V_2, E_2) dinotasikan degan $G_1 \odot G_2$, yaitu graf yang diperoleh dari mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan $|V(G_1)|$ duplikat dari G_2 $(G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3} \ldots \ldots \ldots .. G_{2,|VG_1|})$ kemudian menghubungkan titik ke-*i* dari G_1 ke setiap titik di $G_{2,i}$, *i* = *1*,*2*,*3*...$|VG_1|$.

Berdasarkan hal tersebut, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang pewarnaan titik pada korona graf kipas dengan graf kipas $(F_n \odot F_n)$ dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga $(Bt_n \odot Bt_n)$.

II. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik. Metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip deduktif dalam logika matematika yaitu dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

Adapun rancangan penelitian yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf hasil operasi korona graf kipas dengan graf kipas, dan graf buku dengan graf buku adalah sebagai berikut:

1. Melakukan studi pustaka dengan mencari referesi dari jurnal, buku, skripsi dan literasi lainnya untuk dijadikan bahan penelitian.
2. Merepresentasikan graf kipas F_n, dan graf buku Bt_n ke dalam operasi korona sehingga diperoleh $(F_n \odot F_n)$, dan $(Bt_n \odot Bt_n)$
3. Observasi.
4. Melakukan pewarnaan titik pada $(F_n \odot F_n)$, dan $(Bt_n \odot Bt_n)$.
5. Menentukan bilangan kromatik pada $(F_n \odot F_n)$, dan $(Bt_n \odot Bt_n)$ dan mendefinisikannya.
6. Teorema baru dan pembuktian.

III. HASILDANPEMBAHASAN

Hasil yang didapat dalam penelitian ini berupa observasi dan teorema dari pewarnaan titik pada korona graf kipas dengan graf kipas $(F_n \odot F_n)$ dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga $(Bt_n \odot Bt_n)$. Namun sebelumnya kita akan menyajikan teorema yang telah ada untuk dijadikan sumber rujukan pada hasil penelitian, kemudian akan dilanjutkan dengan definisi dan hasil observasi dari korona graf kipas dengan graf kipas dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga.

Teorema 3.1. (Broogs) Misal *G* adalah suatu graf terhubung. Jika *G* bukan graf lengkap atau graf siklus ganjil maka :

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Definisi 3.1 Operasi korona graf kipas F_n dan F_n dinotasikan dengan $F_n \odot F_n$ untuk $n \geq 2$ maka himpunan titiknya adalah $V(F_n \odot F_n)$ = $\{A_1\} \cup \{A_2 x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_2 A_1\} \cup \{x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j x_i | 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j A_1 | 1 \leq j \leq n\}$, dan himpunan sisi $E(F_n \odot F_n)$ = $\{A_1 x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{A_2 x_i\, y_j x_i | 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j x_i\, y_{j+1} x_i | 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_2 A_1\, y_j A_1 | 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_j A_1\, y_{j+1} A_1 | 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{A_1\, y_j A_1 | 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_1\, A_2 A_1\} \cup \{x_i\, y_j x_i | 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i\, A_2 x_i | 1 \leq i \leq n\}$.

Observasi 3.1. Dari Definisi di atas maka hasil observasinya adalah $|V(F_n \odot F_n)| = n^2 + 3n + 2$, dan $|E(F_n \odot F_n)| = 3n^2 + 5n - 1$.

Definisi 3.2 Operasi korona graf buku segitiga Bt_n dan Bt_n dinotasikan dengan $Bt_n \odot Bt_n$ untuk $n \geq 2$ himpunan titiknya adalah $V(Bt_n \odot Bt_n)$ = $\{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{x_j | 1 \leq j \leq n\} \cup \{B_k x_j | 1 \leq k \leq 2, 1 \leq j \leq n\} \cup \{B_k A_i | 1 \leq k \leq 2, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_l x_j | 1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_l A_i | 1 \leq l \leq n, 1 \leq i \leq 2\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(Bt_n \odot Bt_n)$ = $\{A_1 A_2\} \cup \{A_i x_j | 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n\} \cup \{B_k x_j\, B_{k+1} x_j | k = 1,\ 1 \leq j \leq n\} \cup \{B_k x_j\, y_l x_j | 1 \leq k \leq 2, 1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{B_k A_i\, B_{k+1} A_i | k = 1, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{B_k A_i\, y_l A_i | 1 \leq k \leq 2, 1 \leq l \leq n, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_j\, B_k x_j | 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{x_j\, y_l x_j | 1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_i\, B_k A_i | 1 \leq k \leq 2, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{A_i\, y_l A_i | 1 \leq l \leq n, 1 \leq i \leq 2\}$

Observasi 3.2 Dari definisi di atas maka hasil observasinya adalah $|V(Bt_n \odot Bt_n)| = n^2 + 5n + 6$ dan $|E(Bt_n \odot Bt_n| = 3n^2 + 11n + 7$.

A. Pewarnaan Titik Pada Korona Graf Kipas Dengan Graf Kipas $(F_n \odot F_n)$

Pada bagian ini akan disajikan hasil tentang pewarnaan titik pada korona graf kipas dengan graf kipas di mana akan diawali dengan teorema baru dan pembuktian serta dilanjutkan dengan gambar sebagai visualisasi kebenaran.

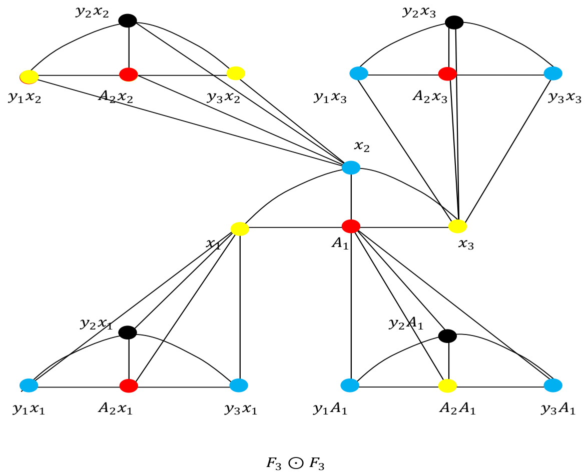
Teorema 3.2. Jika G adalah graf hasil operasi korona graf kipas dengan graf kipas $(F_n \odot F_n)$, maka $\chi\ (F_n \odot F_n)$ = 4 untuk $n \geq 2$

Bukti : Jumlah bilangan kromatik $(F_n \odot F_n)$ = 4 untuk $n \geq 2$. Ini benar karena pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada suatu graf G adalah pemberian warna berbeda pada setiap titik yang bertetangga di G, sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Secara umum pewarnaan titik dari graf G = (V,E) dengan k warna adalah suatu pemetaan $c: V(G) \rightarrow \{\,1.2 \ldots k\}$ sedemikian sehingga $c\,(x_1) \neq c(x_2)$ untuk setiap titik (x_1) dan (x_2) yang bertetangga di G. Maka pewarnaan titik pada Graf $(F_n \odot F_n)$ dapat diilustrasikan dalam gambar 4.2 bahwasannya V (A_1) bertetangga dengan $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ sehingga jika A_1 diwarnai dengan warna merah maka $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ tidak memiliki peluang warna yang sama dengan A_1, selanjutnya untuk $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ akan diwarnai denga kombinasi dua warna berbeda (kuning dan biru), karena sisinya membentuk graf lintasan atau $\{x_i x_{i+1} | 1 \leq i \leq n\}$. Untuk sementara G_1 diwarnai dengan 3 warna berbeda. Selanjutnya karena operasi korona graf $G_1 \odot G_2$ diperoleh dari mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan $|V\,(G_1)|$ duplikat dari G_2 $(G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3} \ldots \ldots \ldots .. G_{2,|VG_1|})$ kemudian menghubungkan titik ke-*i* dari G_1 ke setiap titik di $G_{2,i}$, *i* = *1,2,3*...$|VG_1|$. sehingga warna V$(G_{2,1},)$ tidak boleh sama dengan titik x_1 pada G_1, tetapi dapat menggunakan warna pada $V(G_1) - x_1$, yaitu 2 warna. Oleh karena $G_{2,1}$ membutuhkan 3 warna sehingga diperlukan satu warna tambahan. Dengan demikian maka warna yang digunakan adalah 4 warna. Sedangkan untuk pewarnaan $G_{2,2}$ dilakukan sama seperti $G_{2,1}$ tetapi penambahan warnanya dapat menggunakan warna dari keempat warna yang ada selain warna yang ada pada $G_{2,2}$ dan x_2. Hal yang sama dapat dilakukan untuk $\{G_{2,i} | 3 \leq i \leq n\}$ dan G_2, A_1.

Berikut adalah fungsi pewarnaan titik $(F_n \odot F_n)$.

$$f(v)\begin{cases} 1, v = A_1 \\ 1, v = A_2 x_i ; 1 \leq i \leq n \\ 2, v = x_i ; i = ganjil ; 1 \leq i \leq n \\ 2, v = y_j x_i ; j = ganjil ; 1 \leq j \leq n ; \\ \qquad\qquad i = genap ; 2 \leq i \leq n \\ 2, v = A_1 A_2 \\ 3, v = x_i ; i = genap ; 2 \leq i \leq n \\ 3, v = y_j x_i ; j = ganjil ; 1 \leq j \leq n ; \\ \qquad\qquad i = ganjil ; 1 \leq i \leq n \\ 3, v = y_j A_1 ; j = ganjil ; 1 \leq j \leq n \\ 4, v = y_j x_i ; j = genap ; 1 \leq j \leq n ; 1 \leq i \leq n \\ 4, v = y_j A_1 ; j = genap ; 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Dengan demikian maka telah terbukti bahwa $\chi(F_n \odot F_n) = 4$ untuk $n \geq 2$. Lebih jelasnya dapat diilustrasikan dalam gambar 4.3. berikut, yaitu pewarnaan titik pada operasi korona graf kipas dengan graf kipas $(F_3 \odot F_3)$.



Gambar 3.1. Pewarnaan titik pada operasi F_3 korona F_3

B. Pewarnaan titik pada korona graf buku segitiga dengan graf buku segitiga $(Bt_n \odot Bt_n)$

Seperti pembahasan sebelumnya yang mana pada bagian ini juga akan menjelaskan tentang pewarnaan titik pada operasi korona graf buku segitiga dengan graf buku segitiga di mana akan diawali dengan teorema baru dan pembuktian serta gambar sebagai visualisasi kebenaran.

Teorema 4.3. Jika G adalah graf hasil operasi korona graf buku segitiga Bt_n dengan graf buku segitiga Bt_n, maka $\chi\ (Bt_n \odot Bt_n)$ = 4 untuk $n \geq 2$

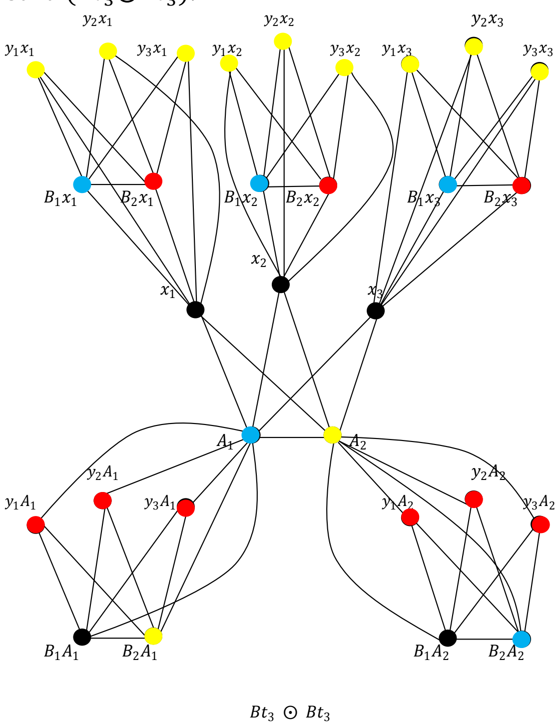
Bukti : Jumlah bilangan kromatik $(Bt_n \odot Bt_n)$ = 4 untuk $n \geq 2$. Ini benar karena pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada suatu graf G adalah pemberian warna berbeda pada setiap titik yang bertetangga di G, sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Secara umum pewarnaan titik dari graf G = (V,E) dengan k warna adalah suatu pemetaan $c: V(G) \rightarrow \{\,1.2 \ldots k\}$ sedemikian sehingga $c\,(x_1) \neq c(x_2)$ untuk setiap titik (x_1) dan (x_2) yang bertetangga di G. Maka pewarnaan titik pada Graf $(Bt_n \odot Bt_n)$ dapat diilustrasikan dalam gambar 4.3 bahwasannya $V(G_1)$ $\{A_i | 1 \leq i \leq 2\}$ adalah dua titik yang bertetangga sehingga akan diwarnai dengan dua warna berbeda (biru dan kuning). Untuk setiap titik $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ tidak saling bertetangga shingga akan diwarnai dengan satu warna (hitam) yang berbeda dengan warna yang ada pada $\{A_j | 1 \leq i \leq 2\}$ karena setiap titik yang ada pada $\{x_j | 1 \leq j \leq n\}$ bertetangga dengan $\{A_i | 1 \leq i \leq 2\}$. Untuk sementara G_1 diwarnai dengan tiga warna berbeda. Selanjutnya karena operasi korona graf $G_1 \odot G_2$ diperoleh dari mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan

$|V(G_1)|$ duplikat dari G_2 $(G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{2,|VG_1|})$ kemudian menghubungkan titik ke-*i* dari G_1 ke setiap titik di $G_{2,i}$, $i = 1,2,3 \ldots |VG_1|$. Sehingga $G_{2,1}$ akan diwarnai dengan dua warna yang telah ada selain warna yang telah digunakan untuk mewarnai titik x_1 sehingga titik pada $G_{2,1}$ akan diwarnai dengan dua warna berbeda. Dengan demikian maka akan ada satu warna tambahan (merah) untuk mewarnai titik pada $G_{2,1}$. Hal yang sama juga akan dilakukan untuk $\{G_{2,j} | 2 \leq j \leq n\}$ dan $\{G_{2,A_i} | 1 \leq i \leq 2\}$. Fungsi pewarnaan titik untuk $(Bt_n \odot Bt_n)$ adalah sebagai berikut.

$$f(v)\begin{cases} 1, v = x_j; 1 \leq j \leq n \\ 1, v = B_k A_i; k = 1; 1 \leq i \leq 2 \\ 2, v = y_l A_i; 1 \leq l \leq n; 1 \leq i \leq 2 \\ 2, v = B_k x_j; k = 2; 1 \leq j \leq n \\ 3, v = A_i; i = 2 \\ 3, v = B_k A_i; k = 2; i = 1 \\ 3, v = y_l x_j; 1 \leq l \leq n; 1 \leq j \leq n \\ 4, v = A_i; i = 1 \\ 4, v = B_k A_i; k = 2; i = 2 \\ 4, v = B_k x_j; k = 1; 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Dengan demikian telah terbukti bahwa $\chi(Bt_n \odot Bt_n) = 4$ untuk $n \geq 2$

Untuk lebih jelasnya dapat diilustrasikan dalam gambar 4.4. berikut, yaitu operasi korona graf buku $(Bt_3 \odot Bt_3)$.



Gambar 3.2. Pewarnaan titik pada operasi Bt_3 Korona Bt_3

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka kesimpulannya adalah.

1. Banyak titik *(order)* dan banyak sisi *(edge)* dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :
   a. 1) $|V(F_n \odot F_n)| = n^2 + 3n + 2$
      2) $|E(F_n \odot F_n)| = 3n^2 + 5n - 1$
   b. 1) $|V(Bt_n \odot Bt_n)| = n^2 + 5n + 6$
      2) $|E(Bt_n \odot Bt_n| = 3n^2 + 11n + 7$.
2. Teorema bilangan kromatik pada graf hasil operasi korona graf kipas dengan graf kipas $(F_n \odot F_n)$ dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga $(Bt_n \odot Bt_n)$ adalah sebagai berikut :
   a. Jika G adalah graf hasil operasi korona graf kipas dengan graf kipas $(F_n \odot F_n)$, maka $\chi(F_n \odot F_n) = 4$ untuk $n \geq 2$
   b. Jika G adalah hasil operasi korona graf buku segi tiga dengan graf buku segi tiga $Bt_n \odot Bt_n$ maka $\chi(Bt_n \odot Bt_n) = 4$ untuk $n \geq 2$

UCAPAN TERIMAKASIH

Kami mengucapkan limpah terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian penelitian ini, baik itu berupa pengetahuan, saran dan masukan guna penyempurnaa penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Hasanah Shofiyatul. (2007) *Aplikasi Pewarnaan Graf*, Malang : UIN Malang Press.

Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit edisi ketiga*. Bandung: Informatika.

Darmaji, (2011). *Dimensi Partisi Graf Multipartit Dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Bandung. Institut Teknologi Bandung

Harsya, A. Y., Agustin., dan Dafik (2014) *Pewarnaan titik pada operasi graf lintasan, graf sikel dan graf bintang*. Prosiding Seminar Matematika Dan Pendidikan Matematika Universitas Jember.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Edition*. New York: McGraw Hill, 1 (1).

Rosen. K. 2007. *Discrete Mathematics and its Application. Sixth Edition*. McGraw-Hill

Hendri Dwy Saputro. (2015). *Dominating Set Pada Operasi Graf Khusus Dan Aplikasinya*. Jember. Digital Repsitori Universitas Jember.

Landerius Maro. (2017) *Himpunan Dominasi Terkendali Pada Korona Graf Lintasan*

Dengan Graf Lintasan, Graf Siklus Dengan Graf Siklus Dan Graf Lengkap Dengan Graf Lengkap. Makassar. Universitas Hasanudin.

Auli Mardhaningsih. (2018) *Bilangan Kromatik Lokasi Untuk Graf* $K_n \odot K_m$. Padang. Jurnal Matematika UNAND. Hal 129-134. ISSN 2303-291X

Desy Tri Puspasari., Dafik, *Pewarnaan Titik pada Graf Khusus: Operasi dan Aplikasinya* CGANT-University of Jember.

Diestel, R. 2005. *Graph Theory: Electronic Edition.* Springer–Verlag Heidelberg. New York.

Chartrand, G., Lesniak, L. 1993. *Graphs and Digraphs sixth Edition. Chapman and Hall/CRC, London–New York–Washington, D.C.*

Ardiyansah R., dan Darmaji (2013) *bilangan kromatik graf hasil amalgamasi dua buah graf.* Jurnal sains dan seni pomits, 2 (1).