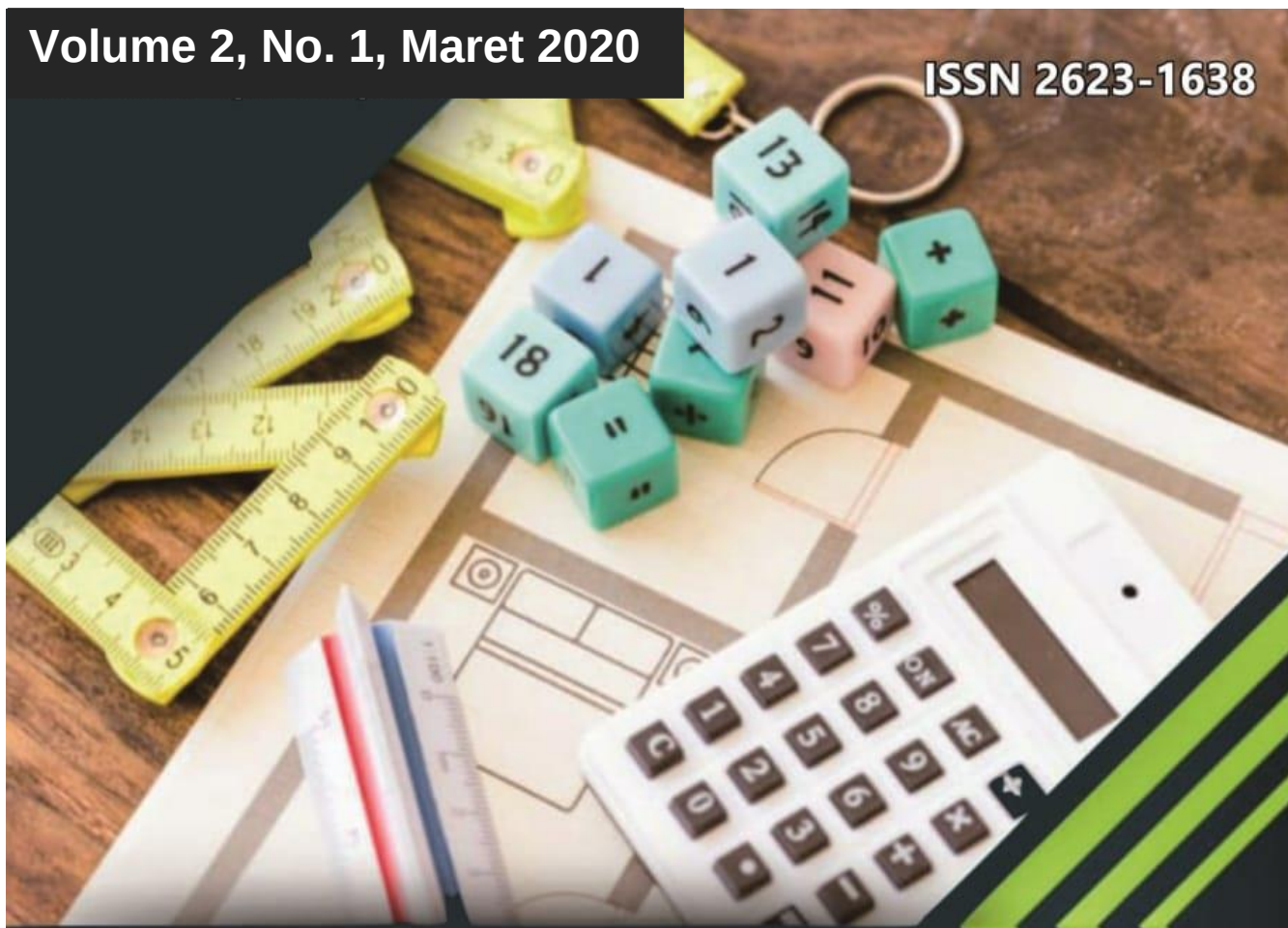


Volume 2, No. 1, Maret 2020

ISSN 2623-1638



JURNAL AXIOMATH

JURNAL MATEMATIKA DAN APLIKASINYA



Penerbit:
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Muslim Maros
email: axiomath@umma.ac.id

TINJAUAN NUMERIK FORWARD DIFFERENCE PADA PERSAMAAN PANAS

Hutomo, G.D¹⁾, Ikbal, M²⁾, Salmiati³⁾

¹⁾²⁾³⁾ Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Muslim Maros
Jln. Dr. Ratulangi No 62, Maros

¹⁾gigiehdwihutomo@umma.ac.id

²⁾ibbal@umma.ac.id

³⁾salmiatirahman99@gmail.com

Abstract— Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui solusi numerik persamaan panas 1D menggunakan metode *Forward Difference*.

Pada penelitian ini solusi numerik dimulai dari melakukan substitusi persamaan *Forward Difference* pada persamaan panas 1D, kemudian menyelesaikan persamaan yang terbentuk, dengan melihat nilai awal dan syarat batas yang telah diberikan. Untuk membantu penyelesaian numerik dengan iterasi yang banyak dan dalam menampilkan plot simulasi maka digunakan bantuan software MATLAB.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode numerik *Forward Difference* dalam menyelesaikan model persamaan Panas 1D berjalan dengan baik dan dapat memudahkan para peneliti dalam melihat simulasi penyebaran panas pada batang logam 1D.

Kata Kunci— Persamaan panas, 1D, metode *Forward Difference*, Stabil.

I. PENDAHULUAN

Matematika mempunyai kelebihan yang menarik karena kemampuannya dalam memodelkan gejala alam atau fisik tanpa melakukan eksperimen secara langsung di lapangan yang terkendala pada biaya dan situasi-situasi tertentu yang sulit dalam melakukan penelitian atau pengamatan. Model yang dimaksud dalam pemodelan matematika dapat berupa suatu rumus atau persamaan persamaan (Chandra dan Rustanto, 2009).

Penghantaran panas pada suatu benda atau logam merupakan fenomena gejala alam atau situasi yang sering kita temukan baik itu secara langsung maupun tidak. Fenomena penghantaran panas ini kadang kita jumpai juga pada kegiatan konstruksi, industri, dll.

Dalam pemodelan matematika sering sekali kita mendapati persamaan-persamaan differensial yang rumit untuk diselesaikan secara analitis. Tetapi dalam menyelesaikan persamaan-persamaan differensial ini tidak hanya dilakukan secara analitis, terdapat juga penyelesaian secara numerik. Metode numerik adalah teknik dimana permasalahan matematika diformulasikan sehingga dapat diselesaikan dengan operasi aritmatika dan logika. Perkembangan komputer dengan waktu komputasi yang semakin cepat, membuat pemodelan matematika semakin banyak diminati, dengan penerapan metode-metode numerik yang mempermudah dalam menyelesaikan persamaan-persamaan matematis pada model matematika yang telah dibuat. Karena komputer digital unggul dalam melakukan operasi semacam itu, metode numerik kadang disebut sebagai matematika komputer (Chapra, 2008).

Triatmojo (1999) menjelaskan bahwa terdapat beberapa metode analisis numerik untuk menyelesaikan persamaan differensial, yaitu metode elemen hingga (finite element method, FEM), metode karakteristik, dan metode beda hingga (finite difference method, FDM). Dimana *Forward Difference* adalah bagian dari metode beda hingga (finite difference method, FDM).

II. PERSAMAAN PANAS DAN PENDEKATAN FORWARD DIFFERENCE

Secara umum persamaan panas adalah sebagai berikut (Boyce dan Richard, 2001) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Pada penelitian ini kita menggunakan persamaan panas dengan nilai awal dan syarat batas sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1 \quad 0 \leq t, \quad (2.2)$$

dengan syarat batas

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t, \quad (2.3)$$

dan kondisi mula-mula

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.4)$$

solusi analitik persamaan ini adalah

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \quad (2.5)$$

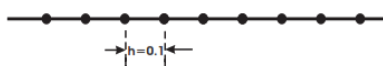
Persamaan panas ini sering juga disebut sebagai persamaan difusi. Pada penelitian ini koefisien difusi α^2 pada domain yaitu bernilai konstan.

Berdasarkan deret Taylor, turunan pertama dan kedua pendekatan *Forward Difference* adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) &= \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &= \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

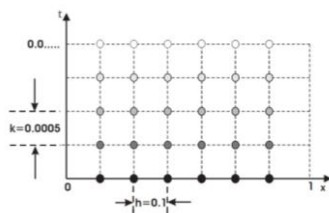
III. DISKRITISASI DOMAIN, DAN PENYELESAIAN MODEL

Posisi *mesh-points* dalam 1-D ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Batang logam dengan posisi titik-titik simulasi (*mesh-points*) distribusi temperatur. Jarak antara titik ditentukan sebesar $h=0,1$

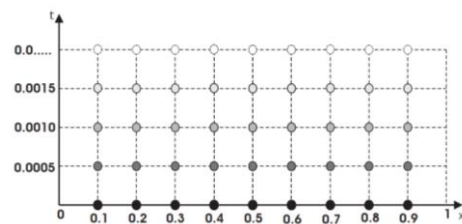
Berikut gambar 2 menjelaskan dimana perubahan waktu tercatat setiap interval $k = 0,0005$. Sekilas Gambar 2 terlihat seolah-olah obyek yang mau disimulasikan berbentuk 2-dimensi, padahal bendanya tetap 1-dimensi yaitu hanya sebatang logam.



Gambar 2. Interval *mesh-points* dengan jarak $h = 0,1$ dalam interval waktu $k = 0,0005$

Selanjutnya, Gambar 8.11 memperlihatkan tepi-tepi syarat batas yaitu angka 0 di ujung kiri dan angka 1 di ujung kanan pada sumbu horisontal x . Diantara batas-batas itu terdapat sebaran titik simulasi berjarak $h = 0,1$. Sementara, sumbu vertikal menunjukkan perubahan dari waktu ke waktu dengan interval $k = 0,0005$. Karena $\alpha = 1$, $h = 0,1$ dan $k = 0,0005$ maka λ dapat dihitung dengan persamaan

$$\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2} = \frac{0,0005}{0,1^2} = 0,05 \quad (3.1)$$



Gambar 3. Posisi *mesh-points*. Arah x menunjukkan posisi titik-titik yang dihitung dengan *forward difference*, sedangkan arah t menunjukkan perubahan waktu yg makin meningkat

Setelah melakukan substitusi persamaan (2.6) ke persamaan (2.2), maka diperoleh sistem persamaan linear yang dapat disusun sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 0,9w_{1,j} + 0,05w_{2,j} &= w_{1,j+1} - 0,05w_{0,j} \\ 0,9w_{2,j} + 0,05w_{3,j} + 0,05w_{1,j} &= w_{2,j+1} \\ 0,9w_{3,j} + 0,05w_{4,j} + 0,05w_{2,j} &= w_{3,j+1} \\ 0,9w_{4,j} + 0,05w_{5,j} + 0,05w_{3,j} &= w_{4,j+1} \\ 0,9w_{5,j} + 0,05w_{6,j} + 0,05w_{4,j} &= w_{5,j+1} \\ 0,9w_{6,j} + 0,05w_{7,j} + 0,05w_{5,j} &= w_{6,j+1} \\ 0,9w_{7,j} + 0,05w_{8,j} + 0,05w_{6,j} &= w_{7,j+1} \\ 0,9w_{8,j} + 0,05w_{9,j} + 0,05w_{7,j} &= w_{8,j+1} \\ 0,9w_{9,j} + 0,05w_{8,j} &= w_{9,j+1} - 0,05w_{10,j} \end{aligned}$$

Syarat batas yang ada menetapkan $w_{0,j} = w_{10,j} = 0$. Lalu dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ w_{3,j} \\ w_{4,j} \\ w_{5,j} \\ w_{6,j} \\ w_{7,j} \\ w_{8,j} \\ w_{9,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ w_{3,j+1} \\ w_{4,j+1} \\ w_{5,j+1} \\ w_{6,j+1} \\ w_{7,j+1} \\ w_{8,j+1} \\ w_{9,j+1} \end{bmatrix}$$

Persamaan matriks tersebut dapat direpresentasikan sebagai

$$Aw^{(j)} = w^{(j+1)}$$

Perhitungan dimulai dari $j = 0$.
Persamaan matriksnya menjadi seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{3,0} \\ w_{4,0} \\ w_{5,0} \\ w_{6,0} \\ w_{7,0} \\ w_{8,0} \\ w_{9,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \\ w_{4,1} \\ w_{5,1} \\ w_{6,1} \\ w_{7,1} \\ w_{8,1} \\ w_{9,1} \end{bmatrix}$$

Nilai $w_{1,0}, w_{2,0}, \dots, w_{9,0}$ kondisi awal sudah ditentukan, yaitu

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Jika $h = 0,1$, maka $x_1 = h = 0,1$; $x_2 = 2h = 0,2$; $x_3 = 3h = 0,3$;; $x_9 = 9h = 0,9$. Lalu masing-masing dimasukkan ke $\sin \pi x$ untuk mendapatkan nilai $u(x, 0)$. Kemudian notasi $u(x, 0)$ diganti dengan notasi w yang selanjutnya dinyatakan sebagai berikut: $w_{1,0} = u(x_1, 0) = u(0,1, 0) = \sin \pi(0,1) = 0,3090$. Dengan cara yang sama: $w_{2,0} = 0,5878$; $w_{3,0} = 0,8090$; $w_{4,0} = 0,9511$; $w_{5,0} = 1,0000$; $w_{6,0} = 0,9511$; $w_{7,0} = 0,8090$; $w_{8,0} = 0,5878$; dan $w_{9,0} = 0,3090$. Sehingga persamaan matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3090 \\ 0,5878 \\ 0,8090 \\ 0,9511 \\ 1,0000 \\ 0,9511 \\ 0,8090 \\ 0,5878 \\ 0,3090 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \\ w_{4,1} \\ w_{5,1} \\ w_{6,1} \\ w_{7,1} \\ w_{8,1} \\ w_{9,1} \end{bmatrix}$$

Hasil dari persamaan tersebut diperoleh : $w_{1,1} = 0,3075$; $w_{2,1} = 0,5849$; $w_{3,1} = 0,8051$; $w_{4,1} = 0,9464$; $w_{5,1} = 0,9951$; $w_{6,1} = 0,9464$; $w_{7,1} = 0,8051$; $w_{8,1} = 0,5849$; dan $w_{9,1} = 0,3075$. Nilai yang diperoleh ini adalah temperatur kawat di masing-masing mesh points setelah selang waktu 0,0005 detik.

Selanjutnya, nilai tersebut dijadikan landasan untuk mendapatkan nilai dari $w_{x,2}$ dengan menggunakan persamaan yang sama.

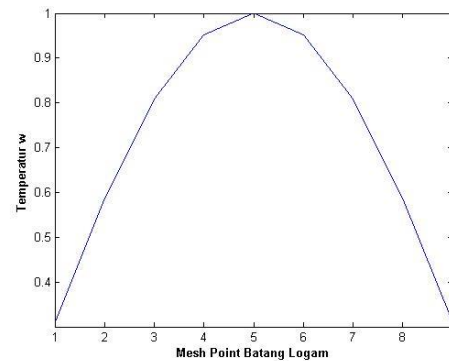
$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3075 \\ 0,5849 \\ 0,8051 \\ 0,9464 \\ 0,9951 \\ 0,9464 \\ 0,8051 \\ 0,5849 \\ 0,3075 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ w_{3,2} \\ w_{4,2} \\ w_{5,2} \\ w_{6,2} \\ w_{7,2} \\ w_{8,2} \\ w_{9,2} \end{bmatrix}$$

Jika waktu maksimum $T = 0,5$ detik, ini menunjukkan bahwa iterasi atau perhitungan berulang sebanyak 1000 kali untuk mencapai waktu maksimum tersebut. Sehingga indeks j bergerak dari 1 hingga 1000.

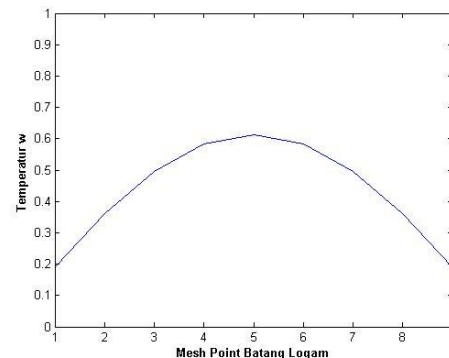
IV. SIMULASI

Dalam menyelesaikan iterasi yang teramat banyak maka simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan aplikasi *Matlab*, yang berdasarkan nilai awal dan sayarat batas yang telah ditentukan pada persamaan (2.2), (2.3), dan (2.4).

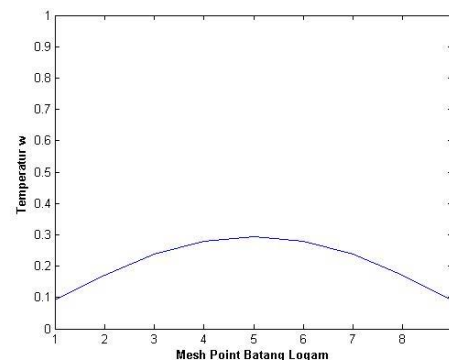
Hasil simulasi diplot dalam bentuk grafik/gambar sehingga memudahkan dalam melihat pergerakan panas seiring berjalannya waktu. Dibawah ini adalah beberapa plot dengan iterasi berbeda



Gambar 4. Plot penyebaran panas pada kondisi awal



Gambar 5. Plot penyebaran panas pada iterasi ke-100

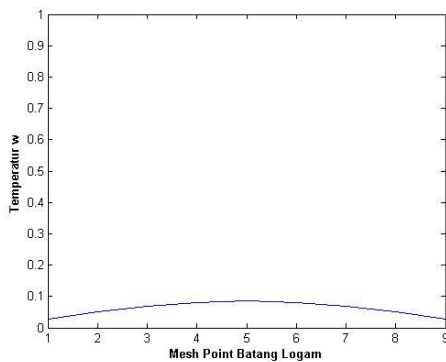


Gambar 6. Plot penyebaran panas pada iterasi ke-250

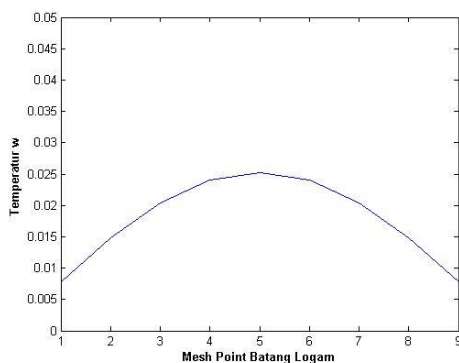
dimana hal ini dapat dipalikasiikan dalam dunia konstruksi, industri, dan sektor-sektor yang berkaitan tentang penghantaran panas.

DAFTAR PUSTAKA

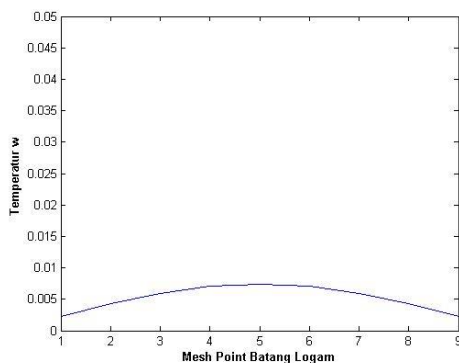
- Boyce, William E. dan Richard Diprima C. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems, Seventh Edition*. New York: Rensselaer Polytechnic Institute.
- Chandra, Tjang Daniel dan Rustanto Rahardi. 2009. *Metode dan Model Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka
- Chapra, Steven C. 2008. *Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists, 3rd edition*. New York: McGraw-Hill
- Triatmojo, Bambang. 1999. *Teknik Pantai*. Yogyakarta: Beta Offset



Gambar 7. Plot penyebaran panas pada iterasi ke 500



Gambar 8. Plot penyebaran panas pada iterasi ke 750



Gambar 9. Plot penyebaran panas pada iterasi ke 1000

V. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dan hasil simulasi yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa metode numerik *Forward Difference* dalam menyelesaikan model persamaan Panas 1D berjalan dengan stabil dan baik sehingga dapat memudahkan para peneliti dalam mengamati simulasi penyebaran panas pada batang logam 1D,