HUBUNGAN NILAI EIGEN TERHADAP DIAGONAL MATRIKS QUATERNION

Susi Ekawati[1], Amir Kamal Amir[2],Salmiati[3]

[1]*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*
Jln. Dr. Ratulangi No 62, Maros

[2] *Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*
Jln. Perintis Kemerdekaan, KM 10, Makassar

[3]*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*
Jln. Dr. Ratulangi No 62, Maros

[1]susiekawati31@gmail.com
[2]amirkamalamir@yahoo.com
[3]salmiatirahman99@gmail.com

***Abstract*— Menurut Zhang (2007), jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $\boldsymbol{bc = 0}$ dan $\boldsymbol{\lambda}$ adalah nilai eigen kiri dari $\boldsymbol{A}$, maka $|\boldsymbol{\lambda - a}||\boldsymbol{\lambda - d}| = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan tiga hal. Pertama, jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $\boldsymbol{bc \neq 0}$ dan $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$ adalah nilai eigen kiri dari $\boldsymbol{A}$, maka $|(\boldsymbol{\lambda_1 - a}) + (\boldsymbol{\lambda_2 - d})| = \boldsymbol{0}$. Kedua, jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan kondisi tertentu dan $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$ adalah nilai eigen kiri dari $\boldsymbol{A}$, maka $|(\boldsymbol{\lambda_1 - a}) + (\boldsymbol{\lambda_2 - d}) + (\boldsymbol{\lambda_3 - f})| = \boldsymbol{0}$. Dan ketiga, jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan kondisi tertentu dan $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}$ adalah nilai eigen kiri dari $\boldsymbol{A}$, maka $|(\boldsymbol{\lambda_1 - a}) + (\boldsymbol{\lambda_2 - d}) + (\boldsymbol{\lambda_3 - p}) + (\boldsymbol{\lambda_4 - s})| = \boldsymbol{0}$.**

Kata Kunci— **Quaternion, Determinan Cayley, Nilai Eigen Kiri.**

I. PENDAHULUAN

Quaternion merupakan perluasan dari bilangan-bilangan kompleks yang tidak komutatif dan diterapkan dalam mekanika tiga dimensi. Sebagai himpunan, quaternion dilambangkan sebagai $\mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ memiliki tiga jenis operasi yaitu penjumlahan, perkalian skalar, dan perkalian quaternion. Elemen-elemen quaternion disimbolkan sebagai $1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ adalah komponen imajiner) dan dapat dituliskan sebagai kombinasi linier : $a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ dimana a, b, c, dan d adalah bilangan riil. Persamaan-persamaan lainnya adalah $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, dan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. (Wikipedia, 2017)

Zhang mengatakan bahwa misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc = 0$. Jika λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$. Farid mengatakan bahwa misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{H})$ dengan $bc \neq 0$. Jika $\lambda \in \sigma_l(A)$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a| = |b|$ jika dan hanya jika $|\lambda - b| = |c|$.

Telah diketahui bahwa jika $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan riil dengan ordo 2×2, maka determinan dari matriks A adalah $a_1b_2 - b_1a_2$ dan jika $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan riil dengan ordo 3×3, maka determinan dari matriks B adalah $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3$. Sedangkan berdasarkan definisi determinan Cayley, jika $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan quaternion dengan ordo 2×2, maka determinan dari matriks A adalah $a_1b_2 - a_2b_1$ dan jika $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan quaternion dengan ordo 3×3, maka determinan dari matriks B adalah $a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$. (Aslaksen, 1991)

Misalkan $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ disebut nilai eigen kiri dari A jika $Ax = \lambda x$ untuk beberapa $x \in \mathbb{H}^n$ yang tak nol atau ekuivalen dengan matriks $(A - \lambda I)$ yang tidak memiliki invers, sehingga $(A - \lambda I)x = 0$. Kemudian jika misalkan $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ disebut nilai eigen kanan dari A jika $Ax = x\lambda$ untuk beberapa $x \in \mathbb{H}^n$ yang tak nol. (Zhang, 2017)

Dari uraian di atas, peneliti bermaksud melakukan penelitian untuk menyelidiki bagaimana hubungan nilai eigen kiri terhadap diagonal matriks quaternion.

II. METODE PENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Pemahaman mengenai masalah determinan dan nilai eigen kiri pada matriks quaternion sangat membantu dalam penyelesaian masalah tersebut.

B. Tahap Rancangan Penelitian

Penentuan hubungan nilai eigen kiri terhadap diagonal matriks quaternion dilakukan dengan mencari determinan dari matriks quaternion dengan menggunakan definisi Cayley sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya. Dari persamaan karakteristik, diperoleh nilai eigen kiri dan vektor eigen. Selanjutnya dianalisis hubungan nilai eigen kiri terhadap diagonal matriks quaternion.

C. Tahap Kesimpulan

Pada tahap ini kesimpulan ditarik dari nilai eigen kiri sehingga diperoleh hubungan terhadap diagonal matriks quaternion.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1 : Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion yang memenuhi salah satu kondisi dari

- $a = d$ dan $c = nb$, $n > 0$
- $a = d$ dan $c = n\bar{b}$, $n > 0$
- $d = \bar{a}$ dan $c = n\bar{b}$, $n > 0$

dan λ_1, λ_2 adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d)| = 0$.

Bukti

Kasus 1 : $a = d$ dan $c = nb$, $n > 0$

Perhatikan bahwa

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} & b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} \\ n(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) & a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

Det $(A - \lambda I) = 0$

$$(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - \lambda)(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - \lambda) - n(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\lambda - \lambda(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})^2 - n(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})^2 = 0$$

$$(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) + (2\lambda_0\lambda_1)\boldsymbol{i} + (2\lambda_0\lambda_2)\boldsymbol{j} + (2\lambda_0\lambda_3)\boldsymbol{k} - 2(a_0\lambda_0 - a_1\lambda_1 - a_2\lambda_2 - a_3\lambda_3) - 2(a_0\lambda_1 + a_1\lambda_0)\boldsymbol{i} - 2(a_0\lambda_2 + a_2\lambda_0)\boldsymbol{j} - (a_0\lambda_3 + a_3\lambda_0)\boldsymbol{k} + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + (2a_0a_1)\boldsymbol{i} + (2a_0a_2)\boldsymbol{j} + (2a_0a_3)\boldsymbol{k} - n(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) - (2b_0b_1)\boldsymbol{i} - (2b_0b_2)\boldsymbol{j} - (2b_0b_3)\boldsymbol{k} = 0$$

Diperoleh persamaan

- $\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 2(a_0\lambda_0 - a_1\lambda_1 - a_2\lambda_2 - a_3\lambda_3) + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) - n(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) = 0$
- $2\lambda_0\lambda_1 - 2(a_0\lambda_1 + a_1\lambda_0) + 2a_0a_1 - 2n(b_0b_1) = 0$
- $2\lambda_0\lambda_2 - 2(a_0\lambda_2 + a_2\lambda_0) + 2a_0a_2 - 2n(b_0b_2) = 0$
- $2\lambda_0\lambda_3 - 2(a_0\lambda_3 + a_3\lambda_0) + 2a_0a_3 - 2n(b_0b_3) = 0$

Dari persamaan tersebut diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = \left(a_0 + b_0\sqrt{n}\right) + \left(a_1 + b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(a_2 + b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j} + \left(a_3 + b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_2 = \left(a_0 - b_0\sqrt{n}\right) + \left(a_1 - b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(a_2 - b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j} + \left(a_3 - b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}$$

dan vektor eigen : $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{n} \end{pmatrix}$.

Dari uraian di atas diperoleh

- $Ax = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} & b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} \\ n(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) & a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$

  $\lambda x = \left(a_0 + b_0\sqrt{n}\right) + \left(a_1 + b_{1\sqrt{n}}\right)\boldsymbol{i} + \left(a_2 + b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j} + \left(a_3 + b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$

  Sehingga dengan mudah dapat dilihat bahwa $Ax = \lambda x$.

- $Ax = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} & b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} \\ n(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) & a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{n} \end{pmatrix}$

  $\lambda x = \left(a_0 - b_0\sqrt{n}\right) + \left(a_1 - b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(a_2 - b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j} + \left(a_3 - b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{n} \end{pmatrix}$

  Sehingga dengan mudah dapat dilihat bahwa $Ax = \lambda x$.

Kemudian perhatikan bahwa

- $(\lambda_1 - a) = \left(a_0 + b_0\sqrt{n}\right) + \left(a_1 + b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(a_2 + b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j} + \left(a_3 + b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})$
  $= \sqrt{n}\,(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})$
- $(\lambda_2 - d) = \left(a_0 - b_0\sqrt{n}\right) + \left(a_1 - b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(a_2 - b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j} + \left(a_3 + b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})$

$$= -\sqrt{n}\,(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})$$

Sehingga jelas bahwa $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d)| = 0$.

Teorema 2 : Jika $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion yang memenuhi salah satu kondisi dari

- $a = d$ dan $c = nb$, $n > 0$
- $a = d$ dan $c = n\bar{b}$, $n > 0$
- $d = \bar{a}$ dan $c = n\bar{b}$, $n > 0$

dan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d) + (\lambda_3 - f)| = 0$.

Bukti

Kasus 2 : $a = d$ dan $c = n\bar{b}$, $n > 0$

Dengan analogi yang sama dengan teorema 1 diperoleh

$$\lambda_1 = \left(a_0 + \sqrt{nb_0^2 + nb_1^2 + nb_2^2 + nb_3^2}\right) + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_2 = \left(a_0 - \sqrt{nb_0^2 + nb_1^2 + nb_2^2 + nb_3^2}\right) + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_3 = f_0 + f_1\boldsymbol{i} + f_2\boldsymbol{j} + f_3\boldsymbol{k}$$

Kemudian perhatikan bahwa

- $(\lambda_1 - a) = \left(a_0 + \sqrt{nb_0^2 + nb_1^2 + nb_2^2 + nb_3^2}\right) + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = \sqrt{nb_0^2 + nb_1^2 + nb_2^2 + nb_3^2}$
- $(\lambda_2 - d) = \left(a_0 - \sqrt{nb_0^2 + nb_1^2 + nb_2^2 + nb_3^2}\right) + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = -\sqrt{nb_0^2 + nb_1^2 + nb_2^2 + nb_3^2}$
- $(\lambda_3 - f) = f_0 + f_1\boldsymbol{i} + f_2\boldsymbol{j} + f_3\boldsymbol{k} - (f_0 + f_1\boldsymbol{i} + f_2\boldsymbol{j} + f_3\boldsymbol{k}) = 0$

Sehingga jelas bahwa $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d) + (\lambda_3 - f)| = 0$.

Teorema 3 : Jika $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & p \\ 0 & q & f \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion yang memenuhi salah satu kondisi dari

- $a = b = c = d = f = p = q$
- $a = b = c = d = f$ dan $p = q$
- $a = d = f = p = q$ dan $b = c$
- $a = d = f, b = q$, dan $c = p = \bar{b}$

dan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d) + (\lambda_3 - f)| = 0$.

Bukti

Kasus 4 : $a = d = f, b = q$, dan $c = p = \bar{b}$

Dengan analogi yang sama dengan teorema 1 diperoleh

$$\lambda_1 = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_2 = a_0 - \sqrt{2b_0^2 + 2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_3 = a_0 + \sqrt{2b_0^2 + 2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

Kemudian perhatikan bahwa

- $(\lambda_1 - a) = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = 0$
- $(\lambda_2 - d) = a_0 - \sqrt{2b_0^2 + 2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = -\sqrt{2b_0^2 + 2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2}$
- $(\lambda_3 - f) = a_0 + \sqrt{2b_0^2 + 2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = \sqrt{2b_0^2 + 2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2}$

Sehingga jelas bahwa $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d) + (\lambda_3 - f)| = 0$.

Teorema 4 : Jika $A = \begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & p \\ s & q & f \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion yang memenuhi salah satu kondisi dari

- $a = c = d = f = r = q$ dan $b = p = s = \bar{a}$
- $a = b = d = f = p = s$ dan $c = r = q = \bar{a}$
- $a = d = f, c = r = q$, dan $b = p = s = \bar{c}$

dan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|(\lambda_1 - a) + (\lambda_2 - d) + (\lambda_3 - f)| = 0$.

Bukti

Kasus 3 : $a = d = f, c = r = q$, dan $b = p = s = \bar{c}$

Dengan analogi yang sama dengan teorema 1 diperoleh

$$\lambda_1 = a_0 + 2b_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_2 = a_0 - b_0 + \sqrt{3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_3 = a_0 - b_0 - \sqrt{3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

Kemudian perhatikan bahwa

- $(\lambda_1 - a) = a_0 + 2b_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = 2b_0$
- $(\lambda_2 - d) = a_0 - b_0 + \sqrt{3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2} + {} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = \sqrt{3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2} - b_0$
- $(\lambda_3 - f) = a_0 - b_0 - \sqrt{3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2} -$

$$\begin{aligned}&+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\\&-(a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\\&=-\sqrt{3a_1^2+3a_2^2+3a_3^2}-b_0\end{aligned}$$

Sehingga jelas bahwa $|(\lambda_1-a)+(\lambda_2-d)+(\lambda_3-f)|=0$.

Teorema 5 : Jika $A=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&p&q\\0&0&r&s\end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion yang memenuhi salah satu kondisi dari

- $a=d, c=nb, p=s, r=nq$, dan $n>0$
- $a=d, c=n\bar{b}, p=s, r=n\bar{q}$, dan $n>0$
- $a=d, c=nb, p=s, r=n\bar{q}$ dan $n>0$
- $a=d, c=n\bar{b}, p=s, r=nq$, dan $n>0$
- $d=\bar{a}, c=n\bar{b}, p=s, r=nq$, dan $n>0$
- $d=\bar{a}, c=n\bar{b}, p=s, r=n\bar{q}$, dan $n>0$
- $a=d, c=nb, s=\bar{p}, r=n\bar{q}$, dan $n>0$
- $a=d, c=n\bar{b}, s=\bar{p}, r=n\bar{q}$, dan $n>0$
- $d=\bar{a}, c=n\bar{b}, s=\bar{p}, r=n\bar{q}$, dan $n>0$

dan $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|(\lambda_1-a)+(\lambda_2-d)+(\lambda_3-p)+(\lambda_4-s)|=0$.

Bukti

Kasus 3 : $a=d, c=nb, p=s, r=n\bar{q}$ dan $n>0$

Dengan analogi yang sama dengan teorema 1 diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\left(a_0+b_0\sqrt{n}\right)+\left(a_1+b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i}\\&\quad+\left(a_2+b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j}+\left(a_3+b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}\\\lambda_2&=\left(a_0-b_0\sqrt{n}\right)+\left(a_1-b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i}\\&\quad+\left(a_2-b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j}+\left(a_3-b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}\\\lambda_3&=\left(p_0+\sqrt{nq_0^2+nq_1^2+nq_2^2+nq_3^2}\right)\\&\quad+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}\\\lambda_4&=\left(p_0-\sqrt{nq_0^2+nq_1^2+nq_2^2+nq_3^2}\right)\\&\quad+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Kemudian perhatikan bahwa

- $$\begin{aligned}(\lambda_1-a)&=\left(a_0+b_0\sqrt{n}\right)+\left(a_1+b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i}\\&\quad+\left(a_2+b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j}+\left(a_3+b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}\\&\quad-(a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\\&=\sqrt{n}\,(b_0+b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(\lambda_2-d)&=\left(a_0-b_0\sqrt{n}\right)+\left(a_1-b_1\sqrt{n}\right)\boldsymbol{i}\\&\quad+\left(a_2-b_2\sqrt{n}\right)\boldsymbol{j}+\left(a_3+b_3\sqrt{n}\right)\boldsymbol{k}\\&\quad-(a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\\&=-\sqrt{n}\,(b_0+b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(\lambda_3-p)&=\left(p_0+\sqrt{nq_0^2+nq_1^2+nq_2^2+nq_3^2}\right)\\&\quad+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}\\&\quad-(p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k})\\&=\sqrt{nq_0^2+nq_1^2+nq_2^2+nq_3^2}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(\lambda_4-s)&=\left(p_0-\sqrt{nq_0^2+nq_1^2+nq_2^2+nq_3^2}\right)\\&\quad+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}\\&\quad-(p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k})\\&=-\sqrt{nq_0^2+nq_1^2+nq_2^2+nq_3^2}\end{aligned}$$

Sehingga jelas bahwa $|(\lambda_1-a)+(\lambda_2-d)+(\lambda_3-p)+(\lambda_4-s)|=0$.

IV. KESIMPULAN

1. Jika $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc\neq 0$ dan λ_1,λ_2 adalah nilai eigen kiri dari A, maka hubungan nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion adalah
$$(\lambda_1-a)+(\lambda_2-d)=0.$$
2. Jika $A=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&f\end{pmatrix}$ atau $A=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&d&p\\0&q&f\end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan kondisi tertentu dan $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka hubungan nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion adalah
$$(\lambda_1-a)+(\lambda_2-d)+(\lambda_3-f)=0.$$
3. Jika $A=\begin{pmatrix}a&b&r\\c&d&p\\s&q&f\end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan kondisi tertentu dan $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka hubungan nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion adalah
$$(\lambda_1-a)+(\lambda_2-d)+(\lambda_3-f)=0.$$
4. Jika $A=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&p&q\\0&0&r&s\end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan kondisi tertentu dan $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka hubungan nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion adalah
$$(\lambda_1-a)+(\lambda_2-d)+(\lambda_3-p)+(\lambda_4-s)=0.$$

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terima kasih pada semua tim peneliti yang telah memberi sumbangsih pengetahuan dan saran.

DAFTAR PUSTAKA

Aslaksen, H. 1991. Quaternionic Determinants. *Mathematics Subject Classification,* Singapore.

Djuddin, Jusriani. 2015. *Bentuk Pusat dan Ideal Gelanggang Polinom Miring atas Quaternion*. Jurusan Matematika Program Pascasarjana. Universitas Hasanuddin Makassar.

Farid, F.O., Qing-Wen, W., & Zhang, F. 2011. On the eigenvalues of quaternion matrices. *Linear and Multilinier Algebra,* **59** : 451 – 473.

Hermana, Haryono. 2016. *Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Circulant, Circulant Simetrik, dan Block Circulant*. Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Institute Pertanian Bogor.

Kurniati, Ema. 2010. *Menentukan Invers Matriks dengan Metode Dekomposisi Adomian*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Wikipedia. 2017. "Quaternion". https://id.wikipedia.org/wiki/Kuaternion.

Zhang, F. 2007. Gersgorin type theorems for quaternionic matrices. *Linear Algebra and its Applications,* **424** : 139-153.