

SOLUSI NUMERIK MENGGUNAKAN METODE DUFORT FRANKEL PADA PERSAMAAN ADVEKSI-DIFUSI 2D DENGAN KOEFISIEN VARIABEL

Hutomo, G.D¹⁾, Kusuma, J²⁾, Zulfitri, W.F³⁾

¹⁾³⁾ Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Muslim Maros
Jln. Dr. Ratulangi No 62, Maros

²⁾ Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Hasanuddin
Jln. Perintis Kemerdekaan, KM 10, Makassar

¹⁾gigieh.dwihutomo@gmail.com

²⁾jeffry.kusuma@gmail.com

Abstract— Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui solusi numerik persamaan Adveksi-Difusi 2D transfer polutan dengan koefisien variabel menggunakan metode DuFort Frankel.

Penyelesaian numerik pada penelitian ini dimulai dari domain yang sederhana. Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan solusi analitiknya. Kemudian metode dan hasil yang ada digunakan untuk memecahkan masalah adveksi-difusi pada domain tidak teratur yang lebih rumit. Dalam melakukan perhitungan numerik dan menampilkan gambar simulasi digunakan bantuan software MATLAB R2014a.

Hasil Penelitian menunjukkan bahwa penggunaan metode Dufort Frankel telah stabil (conditionally stable), konsisten, dan konvergen dalam menyelesaikan persamaan adveksi difusi 2D dengan koefisien adveksi berupa variabel.

Kata Kunci— Adveksi-difusi, metode DuFort Frankel, Stabil, Konsisten, Konvergen, Domain tidak teratur.

I. PENDAHULUAN

Matematika hadir sebagai alat yang menarik dalam memodelkan fenomena gejala alam, karena matematika mendesain fenomena alam dalam bentuk konstruksi matematis. Konstruksi tersebut dapat berupa konstruksi grafis, simbolik, dan simulasi. Hal tersebut menjadikan kelebihan bagi model matematika dibandingkan melakukan eksperimen secara langsung di lapangan yang terkendala pada biaya

dan situasi-situasi tertentu yang sulit dalam melakukan penelitian atau pengamatan. Model simbolik yang dimaksud dalam pemodelan matematika dapat merupakan suatu rumus atau persamaan seperti persamaan hukum Newton kedua (Chandra dan Rustanto, 2009).

Persamaan matematika lain yang memodelkan fenomena gejala alam adalah persamaan Adveksi-Difusi atau yang sering disebut dengan persamaan transpor. Persamaan Adveksi-Difusi adalah persamaan matematis yang didesain untuk mempelajari fenomena transpor polutan. Triatmojo (1999) menjelaskan bahwa persamaan transpor merupakan salah satu persamaan differensial yang merepresentasikan sirkulasi aliran air di estuari dengan variabel C (Konsentrasi garam) sebagai fungsi ruang dan waktu.

Dalam pemodelan matematika sering sekali kita mendapati persamaan-persamaan differensial yang rumit untuk diselesaikan secara analitis. Tetapi dalam menyelesaikan persamaan-persamaan differensial ini tidak hanya dilakukan secara analitis, terdapat juga penyelesaian secara numerik. Metode numerik adalah teknik dimana permasalahan matematika diformulasikan sehingga dapat diselesaikan dengan operasi aritmatika dan logika. Perkembangan komputer dengan waktu komputasi yang semakin cepat, membuat pemodelan matematika semakin banyak diminati, dengan penerapan metode-metode numerik yang mempermudah dalam menyelesaikan persamaan-persamaan matematis pada model matematika yang telah dibuat. Karena komputer digital unggul dalam melakukan operasi

semacam itu, metode numerik kadang disebut sebagai matematika komputer (Chapra, 2008).

Triatmojo (1999) menjelaskan bahwa terdapat beberapa metode analisis numerik untuk menyelesaikan persamaan differensial, yaitu metode elemen hingga (finite elemen method, FEM), metode karakteristik, dan metode beda hingga (finite difference method, FDM). Dari ketiga metode hitungan tersebut di atas, FDM yang paling banyak digunakan dalam model sirkulasi aliran air. Ada dua skema dasar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan metode beda hingga (FDM), yaitu skema eksplisit dan implisit. Berangkat dari kedua skema tersebut kemudian berkembang beberapa macam skema, seperti diantaranya Lax Wendroff, Leap Frog, Crank Nicolson, dan DuFort Frankel (Trefethen, 1996).

Banyak penelitian telah dilakukan tentang penggunaan metode beda hingga dalam menyelesaikan persamaan Adveksi-Difusi untuk mempelajari fenomena transfer polutan, diantaranya adalah Ahmad (2000), Thongmoon, dkk (2007), Alman, dkk (2013), dan Kusuma, dkk (2014). Kebanyakan penelitian yang telah dilakukan tersebut mempelajari penyebaran polutan pada perairan dengan domain yang teratur dan menggunakan koefisien yang konstan, sedangkan persoalan yang berada disekitar kita menyatakan sebaliknya. Walaupun demikian, metode beda hingga tetap menyediakan solusi numerik yang akurat dan dapat dipakai untuk mendapatkan solusi numerik yang diinginkan (Kusuma, 2014).

Dinamika transfer polutan pada perairan ini tentu sangat menarik untuk dikaji, agar kita bisa memprediksi perilaku polutan pada waktu tertentu dan menganalisis akibat dari situasi yang berbeda terhadap perilaku tersebut.

II. PERSAMAAN MODEL ADVEKSI DIFUSI

Berdasarkan literatur yang telah diperoleh, secara umum persamaan model adveksi difusi yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} C + u \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} C + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

Terdapat beberapa asumsi yang diterapkan dalam model yang digunakan, yaitu :

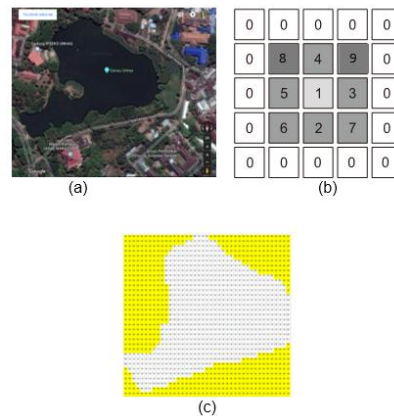
Persamaan Adveksi Difusi yang digunakan adalah pada kasus aliran steady, artinya karakteristik aliran air atau koefisien kecepatan aliran dan difusi pada domain yaitu tidak berubah terhadap waktu t.

Koefisien kecepatan u dan v tidak bernilai konstan, tetapi bergantung pada koordinat (x, y) atau $u = u(x, y)$ dan $v = v(x, y)$.

Sedangkan untuk Koefisien difusinya bernilai konstan.

III. GAMBAR GEOMETRI, DISKRITISASI DOMAIN, DAN PENYELESAIAN MODEL

Domain yang digunakan pada penelitian ini adalah danau Universitas Hasanuddin (UNHAS) yang terletak di Jl. Perintis Kemerdekaan Km. 10, Makassar. Gambar peta domain diambil secara langsung dengan bantuan citra satelit Google Maps, kemudian domain tersebut kita diskritisasi dan diberi kode batasan. Kode yang digunakan adalah kode untuk luar domain (kode 0), dalam domain (kode 1), kiri (kode 5), kanan (kode 3), atas (kode 4), bawah (kode 2), kiri-bawah (kode 6), kanan-bawah (kode 7), kanan-atas (kode 8), dan kiri-atas domain (kode 9).



Gambar 1. (a) Citra Satelit menggunakan Google Maps dari domain (danau UNHAS), (b) Kode batasan Domain, (c) Diskritisasi Domain.

Persamaan model transfer polutan Adveksi Difusi 2D (3.1) selanjutnya akan diubah dalam bentuk persamaan beda hingga DuFort Frankel sebagai berikut:

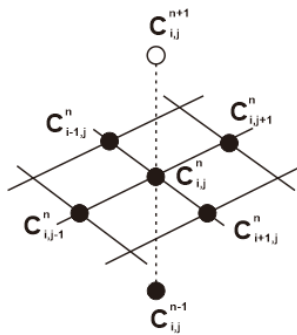
$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + u' C_{i,j}^n + u \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v' C_{i,j}^n + v \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = D_x \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + D_y \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (3.2)$$

kemudian didapat:

$$C_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1 - 2B_x - 2B_y}{1 + 2B_x + 2B_y} \right) C_{i,j}^{n-1} + \left(\frac{-A_x + 2B_x}{1 + 2B_x + 2B_y} \right) C_{i+1,j}^n + \left(\frac{A_x + 2B_x}{1 + 2B_x + 2B_y} \right) C_{i-1,j}^n + \left(\frac{-A_y + 2B_y}{1 + 2B_x + 2B_y} \right) C_{i,j+1}^n + \left(\frac{A_y + 2B_y}{1 + 2B_x + 2B_y} \right) C_{i,j-1}^n - \left(\frac{2E}{1 + 2B_x + 2B_y} \right) \quad (3.3)$$

Dimana:

$$A_x = \frac{u\Delta t}{\Delta x}, A_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y}, B_x = \frac{D_x\Delta t}{(\Delta x)^2}, B_y = \frac{D_y\Delta t}{(\Delta y)^2}, E = (u' + v')\Delta t \quad (3.4)$$



Gambar 2. Skema Metode DuFort Frankel dengan koordinat eksekusi

Metode DuFort Frankel method yang digunakan akan stabil jika $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha \leq E$, untuk $2B_x + 2B_y = \alpha$, dan $A_x + A_y = \beta$, dimana A_x, A_y, B_x, B_y, E diberikan pada persamaan (3.4).

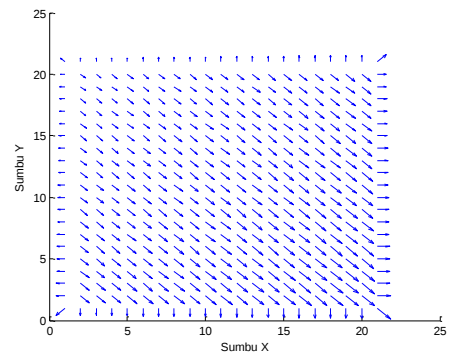
Selanjutnya penggunaan metode beda hingga yang lain dikombinasikan dalam penyelesaian model berdasarkan waktu awal, kontur dan sumber polutan pada domain, seperti metode Forward Time Central Space (FTCS), metode Forward Time Backward Space (FTBS) dan Forward Time Forward Space (FTFS).

IV. SIMULASI

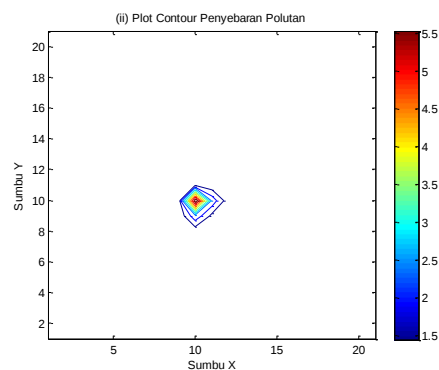
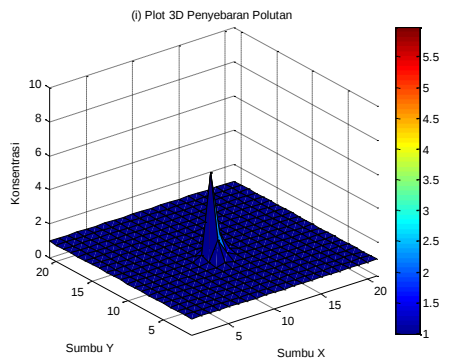
Simulasi kita mulai dari domain yang sederhana yaitu domain persegi dengan daerah domain $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$ lalu ke domain yang kompleks dalam hal ini adalah domain berbentuk danau UNHAS, dengan nilai awal 10 pada grid tertentu sebagai sumber polutan, dan untuk grid yang lain bernilai 1, adapun syarat batas yang berlaku adalah $\frac{\partial C}{\partial n} = \frac{\partial C}{\partial x} n_x + \frac{\partial C}{\partial y} n_y = 0$; dimana $n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (sesuai batas).

A. Simulasi I

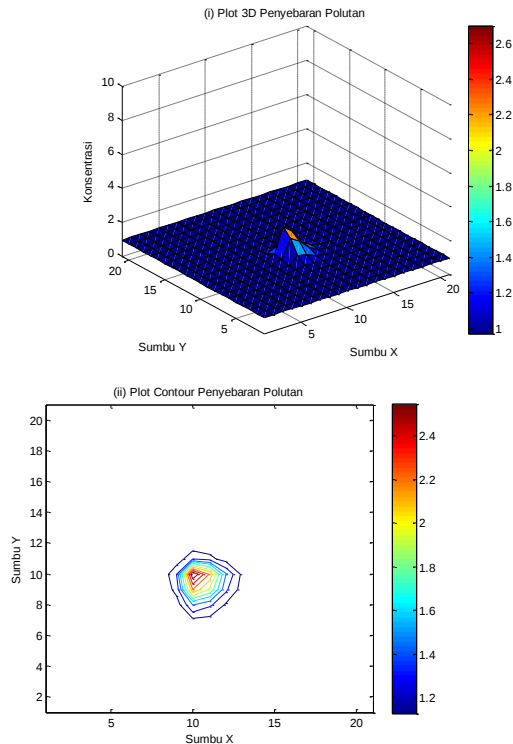
Simulasi pertama, kita mulai dari domain berbentuk persegi $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$, dengan koefisien adveksi $u(x,y) = 0,01 + 0,005x - 0,005y$, dan $v(x,y) = -0,01 - 0,005x + 0,005y$, serta koefisien difusi bernilai konstan $D_x = D_y = 0.0004$. Dengan $\Delta x = \Delta y = 0,05$ dan $\Delta t = 0,05$. Adapun nilai awal yang diberikan yaitu untuk sumber polutan pada grid $C(10,10,1) = 10$, sedangkan untuk grid yang lain pada domain kita beri nilai 1. Hasil simulasi dapat dilihat pada gambar 4.20, 4.21, 4.22 dan 4.23 di bawah ini.



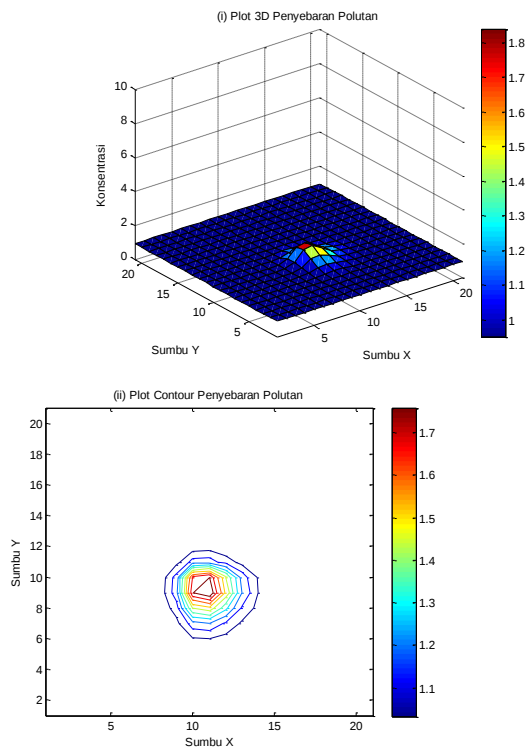
Gambar 3. Plot Vector Field Kecepatan Arus pada domain persegi*



Gambar 4. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 1$ (time step 20)



Gambar 5. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 3$ (time step 60)



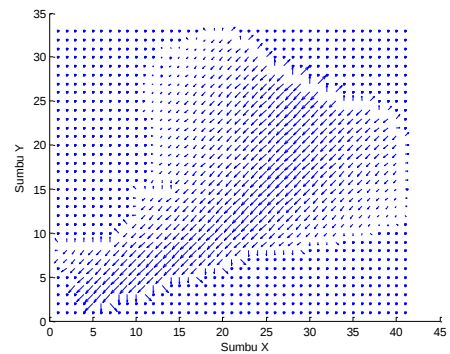
Gambar 6. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 5$ (time step 100)

Pada plot gambar 3 menjelaskan arah arus atau vektor field pada domain akibat vektor kecepatan u dan v . Diketahui bahwa simulasi numerik kita mulai dengan sumber polutan pada satu titik grid yaitu pada grid $C(10,10,1) = 10$.

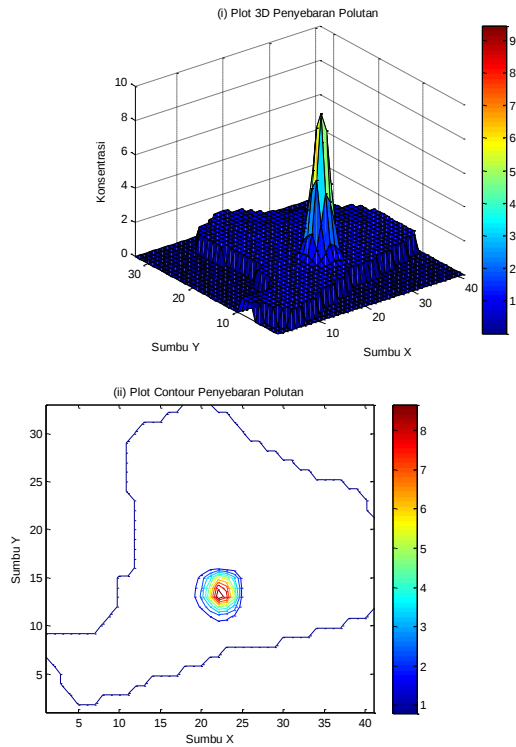
Berdasarkan gambar 4, 5 dan 6 dapat dijelaskan bahwa, ketika waktu berjalan, polutan akan bergerak mengikuti arus, yang sekaligus berdifusi, dan mengalami pengurangan nilai konsentrasi. Dari hasil numerik didapatkan nilai konsentrasi setelah berjalannya waktu $T = 5$ (time step 100) mengalami perubahan yaitu grid $C(10,10,100) = 1,6902$.

B. Simulasi II

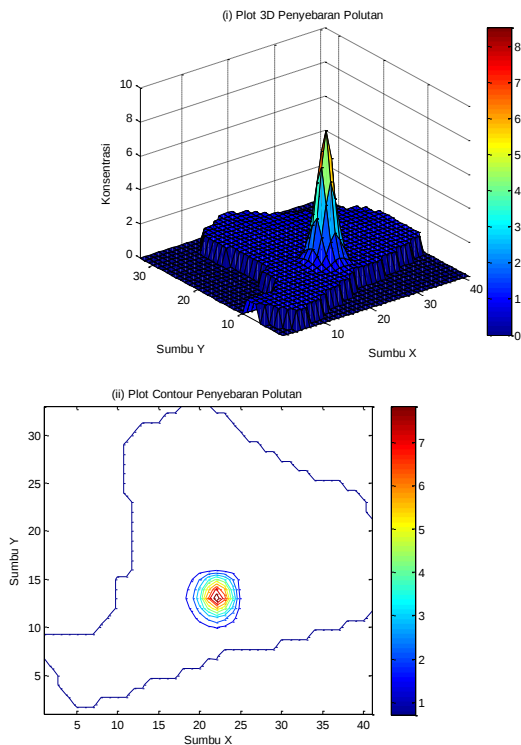
Domain yang digunakan pada simulasi ketiga ini berbentuk danau UNHAS dengan panjang (y) $\pm 400\text{m}$ dan lebar (x) $\pm 320\text{m}$, sumbu x kita bagi 33 grid, sumbu y kita bagi menjadi 41 grid ($\Delta x = 0,025$, $\Delta y = 0,03125$), dan $\Delta t = 0,005$ satuan waktu. Koefisien adveksi $u(x,y), v(x,y)$ disediakan dalam file excel (lampiran) serta koefisien difusi bernilai konstan $D_x = D_y = 0,00013$. Adapun nilai awal yang diberikan yaitu untuk sumber polutan pada grid $C(13,22,1) = C(13,23,1) = C(13,24,1) = C(14,22,1) = C(14,23,1) = C(14,24,1) = 10$, sedangkan untuk grid yang lain pada domain kita beri nilai 1. Hasil simulasi dapat dilihat pada gambar 4.28 – 4.31 di bawah ini.



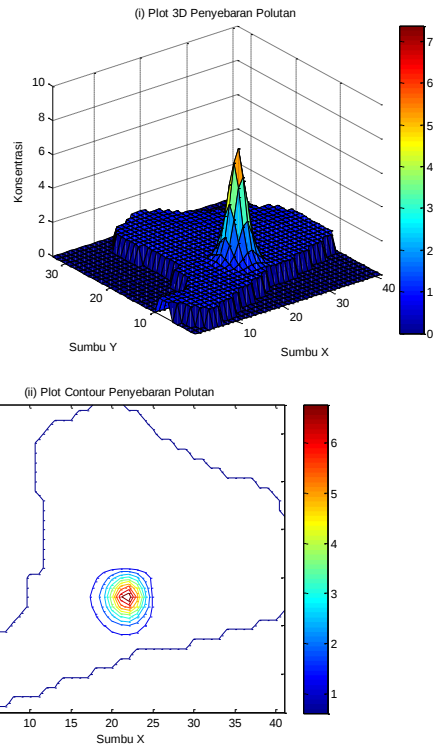
Gambar 7. Plot Vector Field Kecepatan Arus pada domain Danau UNHAS*



Gambar 8. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 2$ (time step 400)



Gambar 9. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 3$ (time step 600)



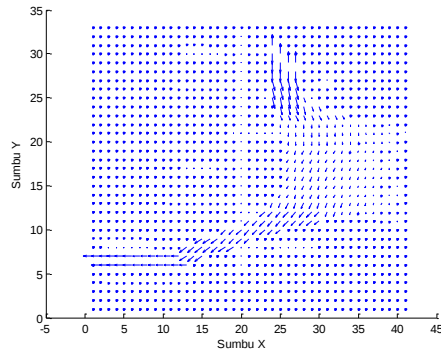
Gambar 10. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 4$ (time step 800)

Pada plot gambar 7 menjelaskan arah arus atau vektor field pada domain akibat vektor kecepatan u dan v . Diketahui bahwa simulasi numerik kita mulai dengan sumber polutan pada satu titik grid yaitu pada grid $C(13,22,1) = C(13,23,1) = C(13,24,1) = C(14,22,1) = C(14,23,1) = C(14,24,1) = 10$. Berdasarkan gambar 8, 9, dan 10 dapat dijelaskan bahwa, makin bertambahnya waktu, polutan akan bergerak mengikuti arus, yang sekaligus berdifusi, dan mengalami pengurangan nilai konsentrasi. Dari hasil numerik didapatkan nilai konsentrasi setelah berjalannya waktu $T = 4$ (time step 800) telah mengalami perubahan yaitu grid $C(22,13,150) = 7,3805$, $C(22,14,150) = 5,7890$, $C(22,15,150) = 3,3120$, $C(23,13,150) = 5,3741$, $C(23,14,150) = 4,2706$, $C(23,15,150) = 2,5665$, $C(24,13,150) = 2,7343$, $C(24,14,150) = 2,2491$, $C(24,15,150) = 1,5981$.

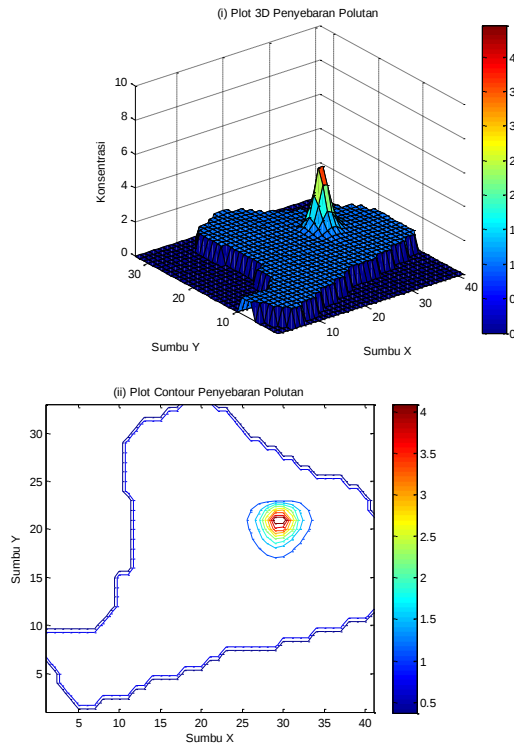
C. Simulasi III

Domain yang digunakan pada simulasi keempat ini sama seperti pada simulasi II yaitu berbentuk danau UNHAS dengan panjang (y) $\pm 400\text{m}$ dan lebar (x) $\pm 320\text{m}$, sumbu x kita bagi 33 grid, sumbu y kita bagi menjadi 41 grid ($\Delta x = 0,025$, $\Delta y = 0,03125$), dan $\Delta t = 0,005$ satuan waktu. Koefisien adveksi $u(x,y)$, $v(x,y)$ berbeda dengan simulasi IIa disediakan dalam file

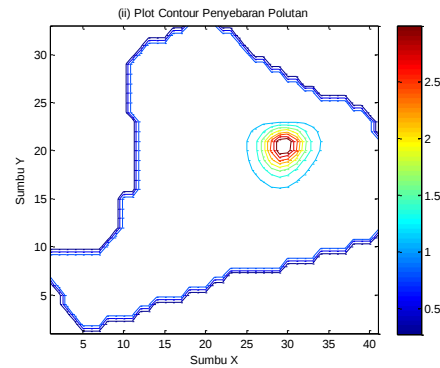
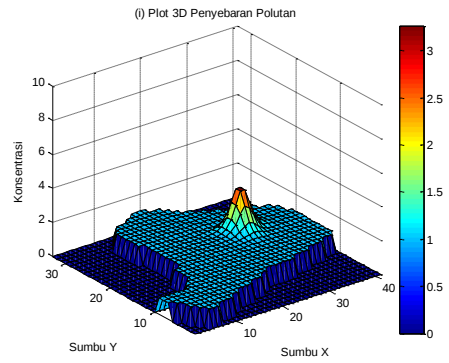
excel (lampiran) serta koefisien difusi bernilai konstan $D_x = D_y = 0,00028$. Adapun nilai awal yang diberikan yaitu untuk sumber polutan pada grid $C(29,21,1) = C(29,22,1), C(30,21,1) = C(30,22,1) = 10$, sedangkan untuk grid yang lain pada domain kita beri nilai 1. Hasil simulasi dapat dilihat pada gambar 4.32 dan gambar 4.35 di bawah ini.



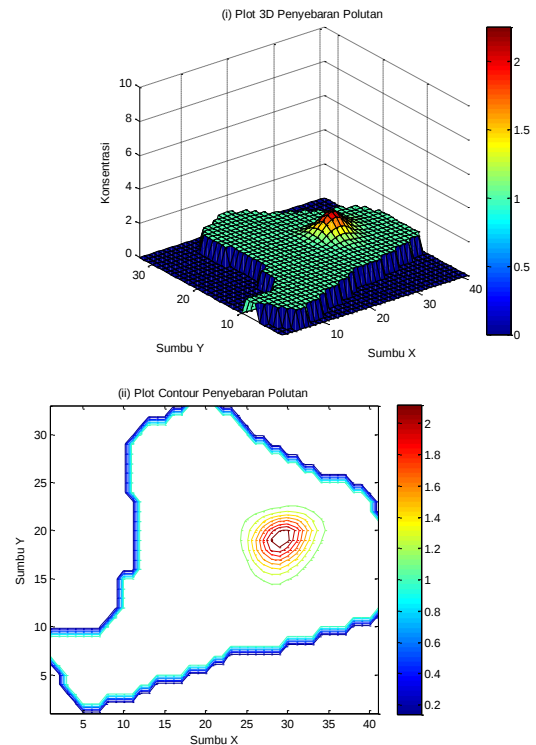
Gambar 11. Plot Vector Field Kecepatan Arus pada domain Danau UNHAS**



Gambar 12. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 2$ (time step 400)



Gambar 13. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 3$ (time step 600)



Gambar 14. Plot Penyebaran Polutan untuk $T = 6$ (time step 1200)

Pada plot gambar 11 menjelaskan arah arus atau vektor field pada domain akibat vektor kecepatan u dan v . Diketahui bahwa simulasi numerik kita mulai dengan sumber polutan pada satu titik grid yaitu pada grid $C(29,21,1) = C(29,22,1), C(30,21,1) =$

$C(30,22,1) = 10$. Berdasarkan gambar 12, 13, dan 14 dapat dijelaskan bahwa, makin bertambahnya waktu, polutan akan bergerak mengikuti arus, yang sekaligus berdifusi, dan mengalami pengurangan nilai konsentrasi. Dari hasil numerik didapatkan nilai konsentrasi setelah berjalannya waktu $T = 6$ (time step 1200) telah mengalami perubahan yaitu grid $C(29,21,1200) = 1,6730$, $C(30,21,1200) = 1,2206$, $C(29,22,1200) = 1,7182$, $C(30,22,1200) = 1,2560$.

V. PERBANDINGAN SOLUSI NUMERIK DAN SOLUSI ANALITIK

Untuk melihat secara sederhana perbandingan solusi analitik dengan numerik dari metode DuFort Frankel pada persamaan adveksi difusi 2D, kita dapat menggunakan domain sederhana yaitu domain persegi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Persamaan differensial Adveksi Difusi 2D

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} C + u \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} C + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

Dengan solusi analitik $C(x, y, t) = e^{\alpha t + \beta x + \gamma y}$, dimana

$$u(x, y) = \left(D_x \beta - \frac{\alpha}{2\beta} \right) + p e^{-\beta x},$$

$$v(x, y) = \left(D_y \gamma - \frac{\alpha}{2\gamma} \right) + q e^{-\gamma y},$$

dan $\alpha, \beta, \gamma, p, q, D_x, D_y$ adalah konstan.

Dengan mengambil $\alpha = -\frac{1}{35}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{20}$, $q = \frac{1}{20}$, $D_x = 0,004$, $D_y = 0,004$ kita akan mendapatkan hasil perbandingan solusi analitik dan solusi numerik sebagaimana yang diberikan pada tabel 1 dan tabel 2.

Tabel 1 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik untuk

$$\Delta x = 0,1, \Delta y = 0,1, \Delta t = 0,1$$

Grid (x,y,t)	T=0,5 (time step 5)			T=1 (time step 10)		
	Hasil Analitik	Hasil Numerik	Galat	Hasil Analitik	Hasil Numerik	Galat
(3,5,t)	12749	13346	0.0597	11870	13162	0.1292
(4,5,t)	13403	14029	0.0626	12479	13831	0.1352
(5,5,t)	14090	14748	0.0658	13118	14539	0.1421
(6,6,t)	15571	16300	0.0729	14498	16068	0.1570
(7,6,t)	16370	17135	0.0765	15241	16892	0.1651
(8,6,t)	17209	18014	0.0805	16023	17758	0.1735

Tabel 2 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik untuk

$$\Delta x = 0,05, \Delta y = 0,05, \Delta t = 0,05$$

Grid (x,y,t)	T=0,5 (time step 10)			T=1 (time step 20)		
	Hasil Analitik	Hasil Numerik	Galat	Hasil Analitik	Hasil Numerik	Galat
(7,10,t)	14364	14366	0.0002	14160	14168	0.0008
(10,10,t)	15483	15484	0.0001	15263	15271	0.0008
(15,10,t)	17544	17546	0.0002	17295	17304	0.0009
(8,16,t)	17111	17113	0.0002	16868	16876	0.0008
(9,16,t)	17544	17546	0.0002	17295	17304	0.0009
(12,16,t)	18911	18912	0.0001	18642	18651	0.0009

Berdasarkan tabel 1 dan 2 terlihat jelas bahwa ketika grid-grid komputasi diperkecil, maka galat atau error numerik semakin kecil pula. Hal ini juga menunjukkan bahwa solusi yang dihasilkan dari metode DuFort Frankel konvergen ke solusi analitik atau eksaknya ketika grid-grid komputasi diperkecil.

VI. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dan hasil penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa metode DuFort Frankel telah stabil (conditionally stable), konsisten, dan konvergen dalam menyelesaikan persamaan adveksi difusi 2D dengan koefisien adveksi berupa variabel, sehingga sangat baik digunakan dalam pemodelan matematika khususnya dalam pemodelan transpor polutan 2D pada perairan dengan arus yang bervariasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, Z. 2000. *Numerical Solution For Advectiondiffusion Equation With Spatially Variable Coefficients*. ISH Journal of Hydraulic Engineering, 6:1, 46-54
- Alman, dkk. 2013. *Penyelesaian Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2D Untuk Transfer Polutan dengan Menggunakan Metode Beda Hingga DuFort Frankel*. Jurnal Pasca Sarjana, Universitas Hasanuddin
- Chandra, Tjang Daniel dan Rustanto Rahardi. 2009. *Metode dan Model Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka
- Chapra, Steven C. 2008. *Applied numerical methods with MATLAB for engineers and*

scientists, 3rd edition. New York: McGraw-Hill

Kusuma, J, dkk. 2014. *Suatu Tinjauan Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2D Transfer Polutan dengan Menggunakan Metode Beda Hingga DuFort Frankel*. KNM XVII ITS, Surabaya

Thongmoon, M, dkk. 2007. *Numerical Solution of 3D Advection-Dispersion Model for Pollutan Transport*. Thai Journal of Mathematics volume 5 Number 1 : 91-108

Triatmojo, Bambang. 1999. *Teknik Pantai*. Yogyakarta: Beta Offset

Trefethen, Lloyd N. 1996. *Finite Difference And Spectral Methods For Ordinary And Partial Differential Equations*. USA: Cornell University