

REPRESENTASI QUATERNION DALAM BENTUK MATRIKS

Erniwati Jalil¹⁾, Muh. Irwan²⁾

¹⁾ Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Muslim Maros

²⁾ Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar

¹⁾erniwatijalil@gmail.com

²⁾muhirwan@uin-alauddin.ac.id

Abstract— Perbedaan antara quaternion dengan bilangan kompleks terletak pada bagian imajiner. Sehingga untuk merepresentasikan suatu bilangan quaternion dapat dilakukan dengan menggunakan bilangan imajiner. Pada peper ini, diperkenalkan kombinasi bilangan kompleks dalam merepresentasikan bilangan quaternion, strukturnya dalam bentuk matriks 2×2 . Beberapa sifat telah dibuktikan pada paper ini termasuk juga perkalian dua bilangan quaternion.

Kata Kunci— Bilangan Kompleks, Bilangan Quaternion

I. PENDAHULUAN

Quaternion merupakan perluasan dari bilangan kompleks dengan tiga bagian imajiner yang saling berkombinasi linear. Ketiga bilangan imajiner tersebut jika dinyatakan dalam bentuk perkalian antara satu dengan yang lain maka terdapat satu sifat yang tidak terpenuhi dari sifat-sifat lapangan (*field*) yaitu sifat komutatif. Hal ini disebabkan karena aturan yang diberikan oleh W.R Hamilton yang menyatakan bahwa perkalian antar unit quaternion tidak berlaku sifat komutatif yang dalam hal ini $ij \neq ji, ik \neq ki, kj \neq jk$. Istilah lain yang dapat dikatakan pada bilangan quaternion adalah sifat nonkomutatif quaternion (Mawardi Bahri, An uncertainty principle for quaternion fourier transform., 2008).

Berdasarkan sifat nonkomutatif quaternion, sehingga pengkajian mengenai bilangan quaternion, menjadi suatu yang menarik untuk dilakukan. Beberapa penelitian yang sebelumnya yang berkaitan dengan quaternion yaitu quaternion dan sifat-sifatnya (Irwan., 2017), representasi quaternion menggunakan C-Fair, Quaternion dan aplikasinya, transformasi Fourier dan transformasi Fourier quaternion (Irwan Muh, 2017), dan lain sebagainya.

Himpunan bilangan quaternion dituliskan dengan simbol $\mathbb{H}$ sebagai penghargaan bagi Sir William Roman Hamilton, dimana elemen-elemen dari bilangan quaternion merupakan kombinasi linear dari bilangan skalar riil dan tiga bagian (Mawardi Bahri, Convolution theorems for quaternion Fourier transform., 2013) imajiner i, j dan k yang dituliskan sebagai $[1, 2, 3]$,

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + i q_1 + j q_2 + k q_3 \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}. \quad (1)$$

Jika q_2 dan q_3 bernilai nol maka persamaan (1) merupakan suatu bilangan kompleks. Sedangkan jika $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$, maka persamaan (1) merupakan elemen identitas penjumlahan quaternion. Jika $q_0 = 1, q_1 = q_2 = q_3 = 0$ maka persamaan (1) disebut elemen identitas perkalian quaternion (Morais, 2012). Selanjutnya, persamaan (1) dapat dituliskan menjadi

$$q = Sc(q) + \mathbf{q}, \quad (2)$$

Dalam hal ini $Sc(q) = q_0$ adalah bagian skalar dari q , dan $\mathbf{q} = i q_1 + j q_2 + k q_3$ sebagai bagian vektor (*vector part*) dari q [4]. Perkalian elemen-elemen dari suatu bilangan quaternion berdasarkan aturan Hamilton dapat dituliskan sebagai (Mawardi Bahri, Convolution theorems for quaternion Fourier transform., 2013)

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

$$jk = -kj = i,$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i.$$

Dapat diperhatikan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian quaternion dilakukan seperti pada operasi penjumlahan dan perkalian vektor. (Todd, 2014) Jika $p, q \in \mathbb{H}$ dengan $p = p_0 + i p_1 + j p_2 + k p_3$ dan $q = q_0 + i q_1 + j q_2 + k q_3$ dimana $p_0, p_1, p_2, p_3, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ maka

$$p + q = (p_0 + q_0) + i(p_1 + q_1) + j(p_2 + q_2) + k(p_3 + q_3). \quad (3)$$

Dengancara yang sama, operasi pengurangan pada bilangan quaternion

$$p - q = (p_0 - q_0) + \mathbf{i}(p_1 - q_1) + \mathbf{j}(p_2 - q_2) + \mathbf{k}(p_3 - q_3). \quad (4)$$

Selanjutnya, operasi perkalian p dan q dilakukan berdasarkan perkalian polinom yaitu

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3)(q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) \\ &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) \\ &\quad + p_0(\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) \\ &\quad + q_0(\mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3) \\ &\quad + \mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \mathbf{j}(p_1q_3 - p_3q_1) \\ &\quad + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1) \\ &= p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{aligned} \quad (5)$$

dimana $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)$ adalah hasil kali titik (dot product) dan $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \mathbf{j}(p_1q_3 - p_3q_1) + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1)$. Hasil perkalian pq dengan qp tidak selalu sama, ini karena perkalian silang dari $\mathbf{p}$ dan $\mathbf{q}$ tidak komutatif. Sehingga dapat dikatakan bahwa $pq = qp$ jika dan hanya jika $p_0 = q_0$ dan $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Definisi 2.1. Untuk sebarang $p \in \mathbb{H}$ dengan $p = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$ dimana $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, konjugasi dari p adalah

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3 \\ &= p_0 - \mathbf{i}p_1 - \mathbf{j}p_2 - \mathbf{k}p_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (6) dapat dipahami bahwa konjugasi dari p merupakan perubahan tanda pada bagian imajiner sedangkan bagian riil tidak berubah tanda. Hasil perkalian konjugasi quaternion adalah suatu anti-involusi, hal ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} (\bar{p}\bar{q}) &= (\bar{q}\bar{p}) \text{ yaitu} \\ \bar{q}\bar{p} &= (q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3) \\ &\quad (p_0 - \mathbf{i}p_1 - \mathbf{j}p_2 - \mathbf{k}p_3) \\ &= q_0(p_0 - \mathbf{i}p_1 - \mathbf{j}p_2 - \mathbf{k}p_3) \\ &\quad - \mathbf{i}q_1(p_0 - \mathbf{i}p_1 - \mathbf{j}p_2 - \mathbf{k}p_3) \\ &\quad - \mathbf{j}q_2(p_0 - \mathbf{i}p_1 - \mathbf{j}p_2 - \mathbf{k}p_3) \\ &\quad - \mathbf{k}q_3(p_0 - \mathbf{i}p_1 - \mathbf{j}p_2 - \mathbf{k}p_3) \\ &= p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - q_0\mathbf{p} - p_0\mathbf{q} - \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (7)$$

Dan modulo p dituliskan dengan $|p|$ dan didefinisikan sebagai

$$|p| = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \quad (8)$$

Dekomposisi quaternion

Misalkan $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$, maka q dapat didekomposisi menjadi

$$q = q_+ + q_- = \frac{1}{2}(q + \mathbf{i}q\mathbf{j}) + \frac{1}{2}(q - \mathbf{i}q\mathbf{j}), \text{ dari dekomposisi ini sehingga} \quad (9)$$

$$q_{\pm} = \{q_0 \pm q_3 + \mathbf{i}(q_1 \mp q_2)\} \frac{1 \pm \mathbf{k}}{2}.$$

Selanjutnya, sebagai pengantar quaternion dan pengenalan quaternion khususnya untuk tingkat mahasiswa strata 1, maka pada paper ini akan diperkenalkan representasi quaternion menggunakan matriks (2×2) .

II. METODE PENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Pemahaman mengenai masalah kestabilan sangat membantu dalam penyelesaian model tersebut.

B. Tahap Rancangan Penelitian

Penentuan nilai ketidakteraturan graf *series parallel* dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya, sedangkan batas atas dianalisis dengan pemberian label sisi pada *series parallel*. Jika batas bawah sama dengan batas atas maka diperoleh nilai ketidakteraturan yang eksak.

C. Tahap Kesimpulan

Pada tahap ini kesimpulan ditarik dari model yang telah dianalisis kestabilan serta hasil dari simulasi.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Representasi quaternion dalam bentuk matriks dibedakan menjadi dua bagian yaitu menggunakan matriks 2×2 dan matriks 4×4 .

A. Representasi dalam bentuk matriks 2×2

Definisi.

Misalkan $q \in \mathbb{H}$, representasi q menggunakan matriks 2×2 didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \leftrightarrow \mathcal{M}_q(\mathbb{C}) \\ &= q_0\sigma_0 + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \begin{pmatrix} q_0 + q_1\mathbf{i} & q_3 + q_4\mathbf{i} \\ -q_3 + q_4\mathbf{i} & q_0 - q_1\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Dimana σ_0 adalah matriks identitas 2×2 dan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ adalah matriks spin Hermit Pauli

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan definisi di atas diperoleh bahwa,

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dari persamaan ini, diperoleh bahwa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -\sigma_0$. Selanjutnya, dapat diperhatikan pula bahwa,

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1.$$

Yaitu,

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

Dan

$$\begin{aligned}\sigma_2\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

Dari fakta ini, dipahami bahwa perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif perkalian yang bersesuaian dengan perkalian bilangan quaternion. Dengan cara yang sama, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa,

$$\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2, \quad \sigma_3\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3$$

Teorema:

Misalkan $\mathcal{M}_q(\mathbb{C}) = q_0\sigma_0 + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix}$, maka nilai mutlak q adalah determinan dari matriks $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$.

Bukti.

$$\begin{aligned}|q| &= \sqrt{\det(\mathcal{M}_q(\mathbb{C}))} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{vmatrix}} \\ &= \sqrt{(q_0 + q_1i)(q_0 - q_1i) - (-q_2 + q_3i)(q_2 + q_3i)} \\ &= \sqrt{(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}\end{aligned}$$

Teorema:

Misalkan $\mathcal{M}_q(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix}$, maka $\bar{q}$ bersesuaian dengan konjugasi transpos matriks $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$.

Bukti.

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \overline{\begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix}^T} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & -q_2 + q_3i \\ q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 - q_1i & -q_2 - q_3i \\ q_2 - q_3i & q_0 + q_1i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - q_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - q_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - q_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3\end{aligned}$$

Teorema 3

Misalkan $\mathcal{M}_q(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix}$ dan $\mathcal{M}_p(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} p_0 + p_1i & p_2 + p_3i \\ -p_2 + p_3i & p_0 - p_1i \end{pmatrix}$
Perkalian $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ dan $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dirumuskan dengan

$$\begin{aligned}q &= \mathcal{M}_p(\mathbb{C})\mathcal{M}_q(\mathbb{C}) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)\sigma_0 \\ &\quad + ((p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\sigma_1 \\ &\quad + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\sigma_2 \\ &\quad + (-p_2q_1 + p_3q_0 + p_0q_3 + p_1q_2)\sigma_3)\end{aligned} \quad (12)$$

Bukti

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_p(\mathbb{C})\mathcal{M}_q(\mathbb{C}) &= \begin{pmatrix} p_0 + p_1i & p_2 + p_3i \\ -p_2 + p_3i & p_0 - p_1i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Untuk menyederhanakan penulisan, dimisalkan.

$$\begin{aligned}u_{11} &= (p_0 + p_1i)(q_0 + q_1i) + \\ &\quad (p_2 + p_3i)(-q_2 + q_3i) \\ u_{12} &= (p_0 + p_1i)(q_2 + q_3i) + \\ &\quad (p_2 + p_3i)(q_0 - q_1i) \\ u_{21} &= (-p_2 + p_3i)(q_0 + q_1i) + \\ &\quad (p_0 - p_1i)(-q_2 + q_3i) \\ u_{22} &= (-p_2 + p_3i)(q_2 + q_3i) + \\ &\quad (p_0 - p_1i)(q_0 - q_1i)\end{aligned} \quad (13)$$

Sehingga persamaan menjadi

$$\mathcal{M}_p(\mathbb{C})\mathcal{M}_q(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dengan memperhatikan setiap elemen matriks $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ dijabarkan dengan cara sebagai berikut,

$$\begin{aligned}u_{11} &= (p_0 + p_1i)(q_0 + q_1i) + (p_2 + p_3i)(-q_2 + q_3i) \\ &= p_0q_0 + p_0q_1i + p_1iq_0 + p_1iq_1i + p_2(-q_2) \\ &\quad + p_2q_3i + p_3i(-q_2) + p_3iq_3i \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\ &\quad + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{12} &= p_0(q_2 + q_3i) + p_1i(q_2 + q_3i) + p_2(q_0 - q_1i) \\ &\quad + p_3i(q_0 - q_1i) \\ &= p_0q_2 + p_0q_3i + p_1iq_2 + p_1iq_3i + p_2q_0 \\ &\quad + p_2(-q_1i) + p_3iq_0 + p_3i(-q_1i) \\ &= (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1) \\ &\quad + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{21} &= (-p_2 + p_3i)(q_0 + q_1i) \\ &\quad + (p_0 - p_1i)(-q_2 + q_3i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -p_2(q_0 + q_1i) + p_3i(q_0 + q_1i) \\
&\quad + (p_0)(-q_2 + q_3i) + (-p_1i)(-q_2 + q_3i) \\
&= -p_2q_0 + (-p_2)q_1i + p_3iq_0 + p_3iq_1i \\
&\quad + p_0(-q_2) + p_0q_3i + (-p_1i)(-q_2) + (-p_1i)q_3i \\
&= (-p_2q_0 - p_3q_1 - p_0q_2 + p_1q_3) \\
&\quad + (-p_2q_1 + p_3q_0 + p_0q_3 + p_1q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{22} &= (-p_2 + p_3i)(q_2 + q_3i) + (p_0 - p_1i)(q_0 - q_1i) \\
&= -p_2(q_2 + q_3i) + p_3i(q_2 + q_3i) + p_0(q_0 - q_1i) \\
&\quad + (-p_1i)(q_0 - q_1i) \\
&= -p_2q_2 + (-p_2)q_3i + p_3iq_2 + p_3iq_3i + p_0q_0 \\
&\quad - p_0q_1i + (-p_1i)q_0 - (-p_1i)q_1i \\
&= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (-p_0q_1 \\
&\quad - p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)i
\end{aligned}$$

Setiap unsur quaternion dari setiap elemen di atas adalah

$$a = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)$$

$$b = (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)$$

$$c = (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)$$

$$d = (-p_2q_1 + p_3q_0 + p_0q_3 + p_1q_2)$$

Sehingga hasil perkalian quaternion p dan q dirumuskan kembali menjadi,

$$\begin{aligned}
pq &= \mathcal{M}_p(\mathbb{C})\mathcal{M}_q(\mathbb{C}) \\
&= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)\sigma_0 \\
&\quad + ((p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\sigma_1 \\
&\quad + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\sigma_2 \\
&\quad + (-p_2q_1 + p_3q_0 + p_0q_3 + p_1q_2)\sigma_3).
\end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas maka dapat dipahami bahwa aturan operasi quaternion dalam bentuk matrik tidak berbeda dengan aturan perkalian bilangan kompleks atau bilangan real. Dan representasi quaternion dalam bentuk matriks

merupakan salah cara untuk memperkenalkan quaternion, tentunya dengan tujuan supaya quaternion dapat dipahami oleh seluruh pembaca yang tertarik untuk mengetahui dan mengkaji lebih jauh tentang quaternion.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terima kasih pada semua tim peneliti yang telah memberi sumbangsih pengetahuan dan saran.

DAFTAR PUSTAKA

- Erniwati Jalil, M. I. (2018). representasi quaternion dengan menggunakan notasi C-Pair. *Jurnal Matematika Statistika dan Analisis*, 6 Nomor 1.
- Irwan Muh, R. M. (2017). Transformasi Fourier dan Transformasi Fourier Quaternion. *Jurnal Matematika Statistika dan Analisis*.
- Irwan., M. (2017). Quaternion and it's properties.
- Mawardi Bahri, d. (2008). An uncertainty principle for quaternion fourier transform. *Computer and Mathematics with Applications*, 2398.
- Mawardi Bahri, d. (2013). Convolution theorems for quaternion Fourier transform,. *Hindawi Publishing Corporation Abstack and Applied Analysis*, 2013, 1-2.
- Morais, J. G. (2012). *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Hidelberg New York London.: Springer Basel.
- Todd, d. (2014). *Quaternion Fourier Transform for Signal and Image Processing*. Fokus.